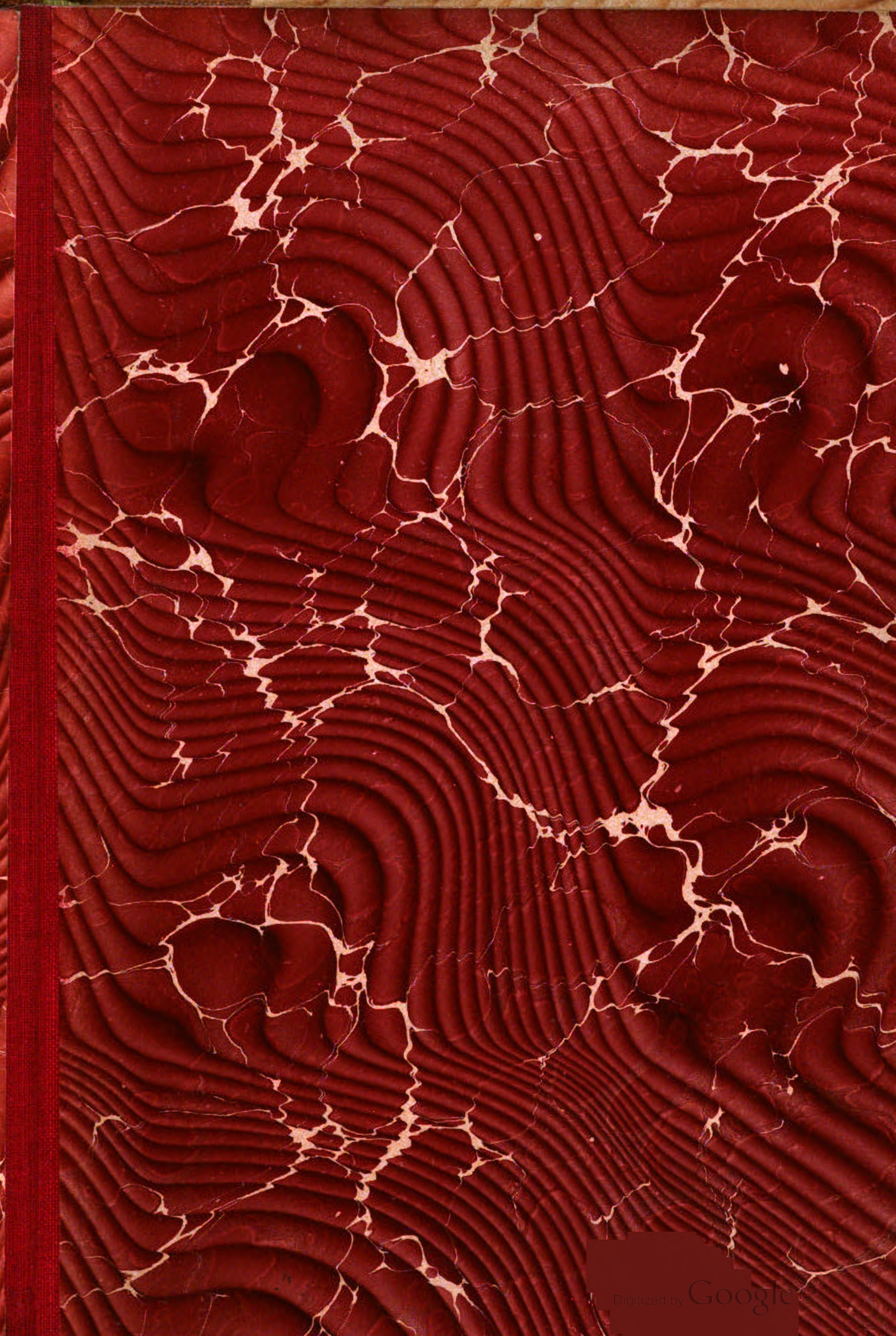

UC-NRLF
B 4 402 571



IL NUOVO CIMENTO

FONDATO DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

E CONTINUATO DA E. BETTI E R. FELICI

ORGANO DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

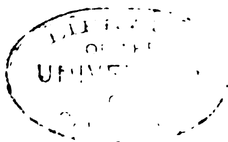
PUBBLICATO PER CURA DEI DIRETTORI

A. BATTELLI, A. RÒITI, V. VOLTERRA

E DEI DELEGATI DELLA SOCIETÀ

A. RIGHI E P. CARDANI

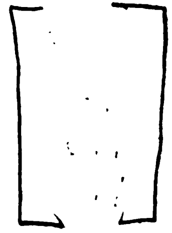
SERIE V. - Tomo IX.



DIREZIONE
Istituto fisico della R. Università
PISA.

AMMINISTRAZIONE
Via Gino Capponi, 8
FIRENZE.

PISA DALLA TIPOGRAFIA PIERACCINI
1905





RICERCHE INTORNO ALLE PROPRIETÀ ELASTICHE DEI FILI DI PALLADIO,

di G. ERCOLINI.

Le deformazioni elastiche d' un filo metallico dipendono, come hanno mostrato le interessantissime esperienze del Signor Bouasse [1]), non solo dalla intensità delle forze agenti, ma specialmente, e in modo assai complicato, dalla legge con la quale essa varia col tempo; sì che dopo le belle ricerche di quel fisico non è più possibile, in un qualsivoglia studio di proprietà elastiche, non tener conto di questa legge, variando in modo arbitrario e discontinuo le forze deformatrici; come, purtroppo, si è sempre fatto in esperienze e misure la cui tecnica è, per lo meno, molto rudimentale e che perciò, nonostante il loro numero prodigiosamente grande, hanno piuttosto imbrogliato un argomento di per sè già poco chiaro e molto complesso, com' è quello della elasticità dei solidi reali.

Poichè la singolare proprietà del palladio, di assorbire enormi quantità d' idrogeno nascente, mi ha invogliato a ricercare se e quali alterazioni apporti tale assorbimento al comportamento elastico dei fili di quel metallo, ho creduto

1) Vedi l' elenco delle magistrali Memorie di H, Bouasse in " Annales d. Ch. et de Phys. „ 7. serie, t. 29, luglio 1903.

necessario in questo studio di abbandonare i metodi di investigazione fin qui adottati, per seguire la nuova via tracciata dal fisico francese, nonostante vi si richiedano apparecchi assai complicati e perfetti.

Per questo, sprovvisto come sono di ogni mezzo, le presenti ricerche mi hanno occupato per molto tempo, e non riuscirei a far comprendere a prezzo di quanti tentativi abbia potuto iniziarle.

Al Prof. Salvioni, della R. Università, che mi prestò alcuni degli apparecchi che ho adoprati, e mi permise l'uso della corrente pel rincuocimento dei fili, porgo qui, di buon grado, i più vivi ringraziamenti.

Trazione.

Dimostra il Sig. Bouasse che nessuno dei vari metodi, statici e dinamici, per determinare la costante di trazione, dà la sicurezza di ottenerne un valore esatto; laonde, piuttosto che occuparmi di variazioni di pseudo-costanti, ho preferito ricercare se l'occlusione influisca sulla perdita di energia nei fenomeni di trazione presentati dai fili di palladio.

A tale scopo mi era necessario di far percorrere al filo in esame un determinato ciclo di trazione con continuità e *con legge esattamente conosciuta*, e ripeterlo un numero sufficiente di volte (teoricamente infinito), affinchè potesse chiudersi e fissarsi nel piano trazione-allungamento. Ciò è essenziale, poichè la curva di deformazione d'un filo *nuovo* non è immutabile, ma si avvicina, più o meno lentamente, alla curva tipica del ciclo chiuso, mediante una serie di continue trasformazioni (accomodamento).

La legge che io ho scelta è la sinusoidale a lungo periodo.

Apparecchi. — Un buon movimento di orologeria a caduta di peso (trasformazione di un regolatore di arco elettrico) muove, di moto praticamente uniforme, una puleggia (raggio di cm. 2,4) e questa, alla sua volta, una P (fig. 1) del raggio di cm. 12,5 (ruota grande della macchina Clarke) munita, per aumentarne la inerzia, di tre lunghe spranghe di ferro a 120° che portano all'estremità, ciascuna, una massa di 2 kg. (non rappresentate nella figura).

Eccentricamente, in E, la P sostiene, normalmente al suo piano verticale, l' asse di una piccola carrucola a larga gola

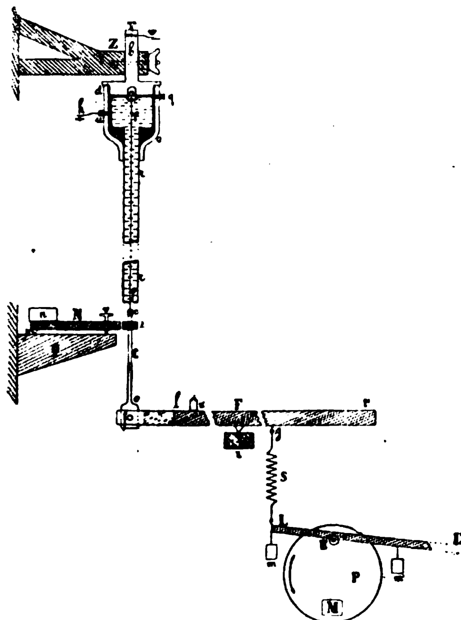


Fig. 1.

nella quale viene ad appoggiarsi, presso un estremo, un' asta di legno L L', lunga cm. 360, girevole intorno a L' su di un asse orizzontale di 40 cm. di lunghezza.

Per le note proprietà dell' eccentrico, date le dimensioni della L L', la rotazione uniforme di P imprime all' estremità L un moto alternativo praticamente sinusoidale. Si tratta di impiegarlo a produrre delle trazioni periodiche.

Ad L è attaccata una spirale cilindrica S che si aggancia in *g* alla leva di legno *l l'* girevole in F su due punte, distanti circa 10 cm., e poggianti sopra una mensola orizzontale murata *z*. All' estremità *l* questa leva porta due robuste striscie di ferro che, nel centro della loro parte sporgente, hanno un foro *f* ad orlo tagliente. Fra di esse viene a trovarsi una lastra di ottone *o*, munita di un foro, alla quale è fissato un grosso filo di ottone C, lungo un 50 cm., che superiormente

porta avvitato un cilindretto di ottone c a cui è saldato l'estremo inferiore del filo φ in esame, mentre il superiore è stretto in una morsa murata. Un asse di acciaio, che passa orizzontalmente per i tre fori, serve a collegare il filo φ con la $l\,l'$. Questa, la spirale e φ giacciono in uno stesso piano verticale, mentre la P e L L' si trovano in uno ad esso perpendicolare [1]).

Due masse $m\,m'$ assicurano il continuo contatto di L L' con E; una terza M compensa la loro influenza sulla rotazione di P.

Gli allungamenti li misuro col metodo dello specchio sorretto da tre punte di ago.

Due anellini di causciù, opportunamente disposti, mantengono il contatto di due di esse, distanti 3 cm,, con lastrine di vetro smerigliato immasticiate all' estremità di una sbarra di legno N girevole, intorno a due punte p distanti 10 cm., su di una mensola Q murata; vi aderisce bene, perchè munita della massa n, e si può regolare in altezza mediante la vite v, la cui estremità conica ruota su un disco di vetro fissato a Q. La terza punta di ago poggia sopra un corto cilindro t saldato al filo C subito al di sotto del cilindretto c.

Il sostegno dello specchio è anche munito di due smorzatori in mica che pescano entro vaschette con olio di vasellina [2]).

Per tracciare la curva trazioni-allungamenti era necessario fare le letture delle rotazioni dello specchio ad intervalli di tempo uguàli.

A questo scopo, la ruota P porta alla periferia 24 cilindretti metallici equidistanti che, passando davanti ad una molla fissa, vengono a chiudere il circuito di un avvisatore elettrico. Tenendo l' occhio al cannocchiale, si fa la lettura di una scala verticale al primo colpo del campanello.

A principio, per esercitarmi in queste misure, ho prodotto diversi cicli con fili di ottone e di rame variando o l'eccentricità di E, o la spirale S, o spostando opportunamente un peso n' su l F, ed ho costatato che, con periodi assai lunghi

1) La figura 1, per semplicità, rappresenta tutto in un piano.
2) Lo specchio e il suo sostegno non compaiono nella figura.

si può, sensa aiuto, fare le letture e registrarle con esattezza. Ciò per me era indispensabile; e quindi ho sempre sperimentato in queste condizioni.

Dopo tali prove ho intrapreso lo studio dei fili di palladio, prendendone, com' era naturale, dei più sottili, e facendoli funzionare da catodi di un voltametro ad acqua della forma seguente.

Un pezzo cilindrico *b* di ferro, della forma indicata nella figura 1, è stretto verticalmente in una robusta morsa Z, murata solidamente. Alla sua estremità inferiore più larga può avvitarsi: nel centro, un cilindretto *a* (1 cm. di diametro), al quale è saldata l' estremità superiore del filo ϕ in esame; alla periferia, un cilindro cavo di ottone *d e*, del diametro esterno di 3 cm., al quale è immasticiata una canna di vetro *r r* lunga cm. 48, del diametro interno di cm. 0,6, sull' asse della quale viene così a trovarsi ϕ.

Da un foro laterale *u* penetra, opportunamente isolato e a perfetta tenuta, un filo di platino *h* che termina in un anello immasticiato esternamente e un po' al di sotto dell' orlo superiore della canna. Esso porta saldati, a 120° l' uno dall' altro, tre fili sottili di platino (diametro di cm. 0,01) che scendono lungo la parete interna della canna, mantenendosi ben tesi e paralleli, e il cui capo viene fissato all' esterno e verso l' estremità inferiore della *r r*.

La superficie interna di *d e* è spalmata di cera, mentre la parte inferiore di *b* è ricoperta di paraffina che, ben calda, si introduce, per mezzo del condotto laterale *q*, servendosi di un piccolo imbuto piegato ad angolo retto: così viene impedito ogni contatto fra parti metalliche estranee e il liquido del voltametro [1]).

La canna può rimanere piena di acqua acidulata per un tempo indeterminato, purchè si abbia cura di aggiungere, di quando in quando, mediante una pipetta affilata, un po' di acqua all' estremità inferiore, altrimenti l' evaporazione incurverebbe troppo il menisco, e una bolla di aria si staccherebbe per salire in alto.

1) Lo strato protettore nella figura è rappresentato dalla parte doppiamente tratteggiata.

Ogni filo in istudio, lungo intorno ai 51 cm., inferiormente esce fuori da *r r* per circa 1 cm. e, prima di essere introdotto nel voltametro, è rincotto sia per renderlo omogeneo dal punto di vista elastico, sia per togliergli i gas che precedentemente avesse assorbiti.

Il rincuocimento di un filo viene operato ponendolo lungo l'asse di una canna di vetro dalla quale estraggo l'aria; una spiralina di ottone, leggermente tesa, attaccata alla sua estremità inferiore, serve per lanciarvi una corrente e per impedire ogni poss bile contatto col vetro durante il riscaldamento.

La corrente è regolata in modo che il filo arrivi al rosso chiaro, e, nell'impossibilità di dedurre esattamente il grado termico che raggiunge, sia per la variazione della resistenza, del calore specifico e delle dimensioni con la temperatura, sia per la non proporzionalità fra questa e il raffreddamento, riferirò sempre, se non altro, l'intensità della corrente e la sua durata.

Esperienze. — Molte prove con un primo filo di palladio mi hanno mostrato che la perdita di energia nella sua trazione è assai piccola; occorre quindi produrre trazioni rilevanti.

Ho allora adoprato una scala lunga 210 cm., piegata in cerchio di 200 cm. di raggio, il cui centro è sullo specchio che dista dal cannocchiale di 150 cm.; in tali condizioni una divisione (mm.) corrisponde ad un allungamento di un micron.

La spirale S fatta al tornio, e perciò molto regolare, è costituita di 53 spire, del diametro di 3 cm., di filo di ottone grosso cm. 0,2; si allunga di 1 cm. per ogni 100 g., e, poichè lo spostamento verticale di L è di 20 cm., la trazione massima esercitata è di 2000 g.

Sulla leva *l l'*, nel tratto *l* F, ho opportunamente collocato una massa *n'*, in modo che la carica minima a cui è assoggettato il filo, compreso il peso dell'asta C, è di 100 g.

In queste condizioni ho eseguito le esperienze, prima operando col filo semplicemente tenuto nell'acqua del voltametro, poi col medesimo dopo avergli fatto assorbire dell'idrogeno. Per questo, tra *h* (+) e *w* (—), faccio passare la corrente di due o più daniell a doppio solfato e, mediante un reostato a

liquido e un galvanometro Nobili, la regolo in modo da avere un continuo sviluppo di piccolissime bollicine gassose su tutta la superficie del filo.

Il sistema dei tre fili di platino accosti alle pareti del voltametro assicura un assorbimento uniforme, poichè procuro che il filo in esame si trovi, il più possibile, sull' asse della canna che ho sempre, con molta cura, disposta verticale mediante sottili zeppe di ebanite, opportunamente collocate fra le branche della morsa Z.

Da prima ho cercato l' influenza dell' occlusione, senza tener conto della quantità di idrogeno assorbito.

Riporto, nella tabella seguente, due cicli intieri (nono e decimo) eseguiti sopra un filo del diametro di cm. 0,021 rincotto con una corrente di 2,1 amp. per 110ˢ, e riferisco senz' altro le 24 letture Δ della scala.

Siccome l' asse E giace sul diametro dei cilindretti-contatto 12 e 24, per la grande lunghezza della L L' rispetto alle escursioni del suo estremo L, questo ha posizioni sensibilmente uguali nei tempi 1 e 23, 2 e 22, ecc...., ai quali corrispondono le trazioni seguenti:

1	e	23	g. 134,10
2	»	22	» 233,98
3	»	21	» 392,90
4	»	20	» 600,10
5	»	19	» 481,18
6	»	18	» 1100,00
7	»	17	» 1358,82
8	»	16	» 1599,99
9	»	15	» 1807,10
10	»	14	» 1966,02
11	»	13	» 1065,90

mentre, come ho detto, la minima (24) è di g. 100, e quindi la massima (12) g. 2100.

Accanto alle Δ sono riportate le differenze δ fra le deviazioni corrispondenti 1 e 23, 2 e 22, ecc. che caratterizzano l' area del ciclo.

	NONO CICLO		DECIMO CICLO	
	Δ	δ	Δ	δ
1	458		454	
2	522		537	
3	657		653	
4	815		811	
5	987		983	
6	1167		1170	
7	1345		1343	
8	1503	38	1499	33
9	1622	40	1619	50
10	1725	75	1721	74
11	1776	95	1771	94
		104		101
↓ 12	1785	107	1791	106
		103		102
↑ 13	1741	99	1738	100
14	1662	72	1656	76
15	1550	63	1543	65
16	1404	35	1399	33
17	1242		1241	
18	1060		1064	
19	883		882	
20	720		717	
21	582		579	
22	482		487	
23	420		421	
24	403		406	

Il ciclo, come si vede, è praticamente fissato.

Dopo il decimo ciclo, lancio la corrente nel voltametro, ed ogni due o tre ore compio nuovi cicli per costatare le variazioni che subiscono, tenendo però sempre chiuso il circuito.

Per brevità riferirò soltanto gli ultimi due cicli (3° e 4°) fissati, eseguiti quando il filo, dopo 24 ore di continuo passaggio di corrente, ha subìto l' assorbimento massimo nelle condizioni in cui si trova, cioè quando la cavità superiore del voltametro, della capacità di circa 5 cm^3., è piena dei gas svolti.

		TERZO CICLO		QUARTO CICLO	
		Δ	δ	Δ	δ
	1	362		364	
	2	428		432	
	3	533		535	
	4	688		690	
	5	860		859	
	6	1048		1045	
	7	1234		1228	
	8	1400	1	1394	0
	9	1539	3	1530	2
	10	1645	4	1635	5
	11	1711	4	1699	5
			6		6
↓	12	1735	8	1729	7
			5		5
↑	13	1709	4	1698	4
	14	1642	3	1632	4
	15	1536	3	1526	3
	16	1396	2	1390	1
	17	1229		1223	
	18	1040		1038	
	19	854		853	
	20	684		685	
	21	529		530	
	22	425		430	
	23	361		364	
	24	335		338	

Chiuso il voltametro in corto circuito, ogni tre o quattro ore ripeto le esperienze: il filo ritorna lentamente allo stato primitivo, e solo dopo un 60 ore ha dato dei cicli uguali ai primi (9° e 10°).

In tutte queste esperienze il periodo del movimento sinusoidale di L è stato di 552ˢ costantemente; la temperatura media dell'ambiente di 21°,3 C.

Dal confronto fra i valori δ delle precedenti esperienze si rileva subito che l'occlusione d'idrogeno *diminuisce l'area dei cicli di trazione.*

Costatato questo fatto e confermato più volte con altre esperienze, era da vedere la sua dipendenza dalla quantità d'idrogeno assorbito.

A questo scopo basta far passare la corrente anche per un secondo voltametro a soluzione di un sale, poichè dalla quantità di metallo depositato si può dedurre, con precisione, quella dell' idrogeno prodotto.

Ma affinchè le misure non riescano illusorie, è necessario produrre l' assorbimento per polarizzazione, evitando ogni più piccola elettrolisi, e perciò la corrente dev' essere debolissima. Data quindi l' enorme quantità di gas che il palladio può assorbire, occorrerebbero molti giorni per avere considerevoli assorbimenti, come ho potuto costatare con molte prove che ho fatto, usando anche il microscopio per scoprire le minime tracce di sviluppo gassoso.

Durante questo lungo tempo, il filo sarebbe andato soggetto a numerosissime oscillazioni di temperatura che, invece, bisognerebbe assolutamente eliminare, come lo consiglia, in ricerche simili, il Sig. Brillouin [1]); e perciò avrei dovuto rinchiudere il voltametro in una stufa a temperatura costante.

Per tal ragione, e per l' altra che sono costretto a lavorare in un locale infelice, mi sono dovuto accontentare di aver costatato il fatto fondamentale, ed ho piuttosto intrapreso delle ricerche intorno alla

Torsione.

Per eseguire su di un filo metallico delle esperienze di torsione che abbiano un senso, occorre, non solo che siano conosciute le sue dimensioni e la sua tensione, ma, eziandio, che sia nota con precisione la legge di torsione in funzione del tempo e le coppie ad ogni istante.

La tecnica diviene perciò complicata ed esige apparecchi perfetti.

D' altronde il metodo delle oscillazioni, a cui si è sempre ricorso, non può indicar nulla di certo intorno all' elasticità del filo di sospensione, a meno che l' ampiezza non sia estremamente piccola: le esperienze del Tomlinson [2]) e del Bouasse

1) Journal d. Phys., 2. serie, t. 7.
2) Phil. Trans. 1886.

dimostrano infatti che la correzione per l' influenza dell' aria può essere anche i *due terzi* dello smorzamento totale.

Io ho usato definitivamente una disposizione che permette di produrre torsioni alternative con legge sinusoidale.

Apparecchi. — Dispongo di un sistema di tre pulegge di legno, fissate su uno stesso asse orizzontale a punte girevoli entro coni a vite: le due prime, (fig. 2) A B di cm. 6,1 e C D di cm. 8 di diametro, a gola larga 1 cm. e piana; la terza F G è del diametro di cm. 21 circa.

All' eccentrico E della solita puleggia P (fig. 1), mossa nel modo precedentemente descritto, è attaccato il capo di uu filo metallico c_0 pieghevole (treccia di fili sottilissimi di rame) che si avvolge, per quattro o cinque giri, sulla AB, alla quale ha poi fissato l'altro capo. Per mantenerlo in continua e costante tensione, sulla gola della CD è fissata l' estremità d'una corda *f*, che si avvolge in senso inverso a quello di c_0, e porta all' altro estremo una massa N.

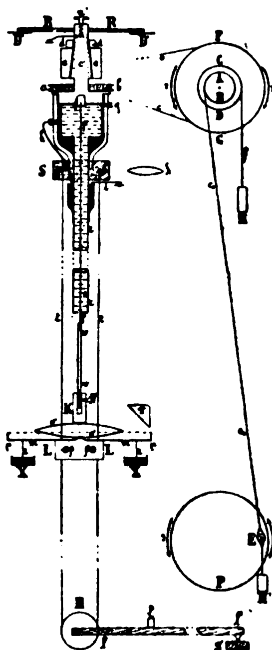


Fig. 2.

Per ogni giro della P la F G compie così due rotazioni di senso inverso, con legge praticamente sinusoidale; però una massa N', posta sull' asse E, deve compensare l' azione della N.

Mediante un cordoncino di seta *c*, mantenuto in tensione costante, il movimento di F G viene trasmesso ad una puleggia orizzontale di legno *a b*, di cm. 5,7 di diametro, fissata al cilindro di ferro *c'* che forma il sostegno del voltametro usato nella trazione, e contenente il filo di palladio nelle stesse condizioni.

Questo cilindro c', munito di un tronco di cono e di un dado a vite d, ruota in un foro conico praticato in un cilindro di ottone $e\,e$, foggiato opportunamente per potersi serrare con forza nella solita morsa murata Z (fig. 1).

Tale parte dell' apparecchio è costruita a perfezione, sì che il movimento del voltametro presenta un attrito molto piccolo e costante, avendo cura di lubrificare con pochissimo sego ben pulito. Tutte le parti sono centrate con precisione in modo che nella rotazione gli spostamenti laterali della canna $r\,r$ sono impercettibili.

Affinchè la corrente possa mantenersi chiusa anche durante la torsione, la $r\,r$ porta superiormente immasticiato un pozzetto circolare, pieno di mercurio, nel quale pesca il capo dell' anode h e quello di un conduttore i fisso.

Per misurare le coppie ho adoprato un dinamometro bifilare così disposto.

All' estremità di una seconda mensola S, murata al di sotto della Z, sono fissati i capi s, s di un sottile filo di rame argentato (diametro cm. 0,01) che scende in due tratti paralleli, t, t, distanti cm. 1,7, in un piano verticale che comprende il filo in esperienza, e, a 140 cm. da S, passa per la gola di una carrucola metallica H girevole intorno ad un asse orizzontale, lungo 5 cm.; questo è posto all' estremità di un' asta di legno $l\,l'$, di 80 cm., collocata, orizzontalmente, nel piano del bifilare, e sulla quale scorre un peso p per variare la tensione del bifilare, poichè essa è girevole in l' su due punte, distanti 11 cm., che poggiano su di una mensola S'.

Ecco come il filo di palladio ϕ si collega col bifilare.

L' estremità inferiore di ϕ è saldata ad un cilindretto che si avvita alla ghiera metallica portata da un tubo capillare di vetro $v\,v$ (diametro esterno cm. 0,39), lungo 31 cm., la parte inferiore del quale, munita pure di ghiera, può, mediante la vite di pressione V, fissarsi rigidamente al cilindretto di alluminio K, a cui è rilegato un sistema di quattro molle di acciaio σ, lunghe 5 cm., che sono disposte in due coppie ad angolo retto e unite fra loro, due per due, alle estremità. Dall' incrocio delle inferiori parte una lastrina rettangolare di alluminio L L, alla quale se ne sovrappone un' altra delle

stesse dimensioni, e si uniscono poi le due mediante i buloni di alluminio β, β', avvertendo di serrare fra esse i fili del bifilare, proprio a metà della loro lunghezza.

Col sistema delle quattro molle si ottiene una tensione regolare, variabile a piacere, fissando *v v* più o meno profondamente nel pezzo K, e sensibilmente costante durante la rotazione del bifilare.

Per leggere le rotazioni di questo, alla lastrina L L è fissata, in un piano orizzontale, una corona circolare di mica *m m*, che termina con tre appendici a 120°, necessarie a sorreggere un nastrino di magnesio μ piegato in circolo (diametro cm. 11,4), sul quale si adagia una leggera striscia di carta divisa in 360 parti uguali, ciascuna di cm. 0,1. Tre smorzatori di magnesio *z z* pescano nell' olio di vasellina contenuto in una vaschetta circolare X, X.

Tutto il sistema del cerchio graduato col suo sostegno e gli smorzatori pesa solo g. 2,15.

È infatti indispensabile che questa massa sia piccola, affinchè la forza viva del sistema risulti trascurabile, e possa ritenersi che, in ogni istante, la coppia dovuta alla torsione sia uguale e di segno contrario a quella da misurare.

Per conoscere il valore delle coppie occorre che, contemporaneamente alla rotazione del bifilare, sia nota quella dell' estremo superiore del filo, cioè del voltametro intero.

A tale scopo al di sopra di *e e*, sul cilindro *c'*, si fissa un disco di legno R R orizzontale che sostiene una corona circolare di cartone D' D', sulla quale è tracciato un circolo diviso in parti uguali che, mediante il prisma π a riflessione totale e una lente λ, si osserva con lo stesso cannocchiale che si adopra per leggere direttamente le rotazioni del dinamometro. Poichè il suo obiettivo ha sufficiente estensione, regolando opportunamente il prisma rispetto alla scala del bifilare, è possibile di avvicinare quanto si vuole le imagini delle due scale nel piano del reticolo, e mettere a contatto i loro contorni utili.

Quando il voltametro ruota, si vedono le due scale spostarsi nello stesso senso con velocità differenti. Allorchè una divisione della D' D' passa sul reticolo, leggo la posizione della

seconda. Basta registrare queste letture: è facile poi, conosciuto il senso della rotazione e il punto di partenza, determinare, quando si vuole, le deviazioni corrispondenti della prima, le cui ampie divisioni, dato i lunghi periodi che ho impiegato, permettono di fare comodamente la registrazione fra una lettura e l' altra.

Così si può determinare il valore della coppia di torsione nelle varie fasi.

Il cannocchiale dista dalla scala del bifilare di 120 cm. e il suo ingrandimento è tale. che posso leggere, con sicurezza, almeno il decimo di grado, la grandezza apparente di una divisione (grado) essendo di cm. 0,35.

Un indice di metallo, immobile poco al di sotto della D' D', serve per avvertire i possibili spostamenti del cannocchiale, poichè la sua imagine deve coincidere sempre col reticolo.

Esperienze. — Le numerose prove che ho fatto hanno mostrato che, pure nella torsione, i fili di palladio presentano una perdita di energia molto piccola: cicli bilaterali, con torsioni anche dell' ampiezza di oltre 1000°, erano sensibilmente rappresentati da una sola linea, mentre fili di rame e di ottone in simili condizioni fissano cicli di area rilevante.

Per questa ragione, ho dovuto preferire di descrivere dei cicli unilaterali e, spostando opportunamente l' eccentrico E, di grande ampiezza.

Riporto nella seguente tabella: a sinistra, un ciclo (sesto) completamente fissato, eseguito su un filo di palladio del diametro di cm. 0,02, lungo cm. 51,5, rincotto con una corrente di amp. 2,1 per 120^s, assoggettato alla tensione di 40 g.; a destra, il ciclo (quinto) fissato, ottenuto dopo che il filo ha, in quattro ore, subito il massimo assorbimento possibile, relativamente alla capacità superiore del voltametro. Con C indico le coppie, espresse in unità arbitrarie, e con α gli azimut corrispondenti; il periodo è di 729^s, la temperatura media 22° C.

La D' D' ha un cerchio diviso in sei parti uguali; per semplicità riporto le letture di 120° in 120°.

CICLO SESTO		CICLO QUINTO	
α	C	α	C
0°,0	— 1761	0°,0	— 1883
113,5	— 1327	113,4	— 1450
226,2	— 820	226,6	— 983
339,8	— 366	340,8	— 574
453,0	107	454,7	— 132
566,9	573	568,8	287
679,3	1092	681,2	790
793,3	1501	796,5	1160
906,9	1920	910,7	1550
1020,9	2289	1023,6	2010
1134,4	2642	1131,3	2370
1246,1	3090	1249,7	2812
1360,2	3367	1361,8	3201
1471,7	3671	1473,7	3534
1584,5	3900	1581,7	3897
1583,8	3854	1585,1	3836
1479,3	3408	1474,7	3496
1366,8	3028	1363,5	3121
1264,2	3525	1252,0	2687
1144,0	2070	1139,7	2244
1031,7	1602	1026,0	1850
917,9	1150	913,0	1389
803,3	700	798,2	1031
689,9	300	684,3	600
575,2	— 81	570,1	185
460,3	— 470	456,0	— 236
346,4	— 880	341,8	— 652
132,5	— 1300	227,9	— 1083
117,0	— 1600	114,1	— 1500
0,0	— 1800	0,0	— 1890

Chiuso il voltametro in corto circuito, il filo ritorna gradatamente alle condizioni iniziali; dopo circa 70 ore ha dato un ciclo uguale al sesto.

La figura 3 rappresenta questi risultati nel piano coppia-azimut, in cui la curva I è propria del filo allo stato naturale, mentre la II si riferisce al ciclo quinto.

Si scorge subito che, anche nella torsione, l'effetto dell'assorbimento è una *diminuzione* dell'area del ciclo.

Ho voluto poi vedere se, per ampiezze molto grandi, questa diminuzione sia sempre considerevole, e, perciò, ho munito

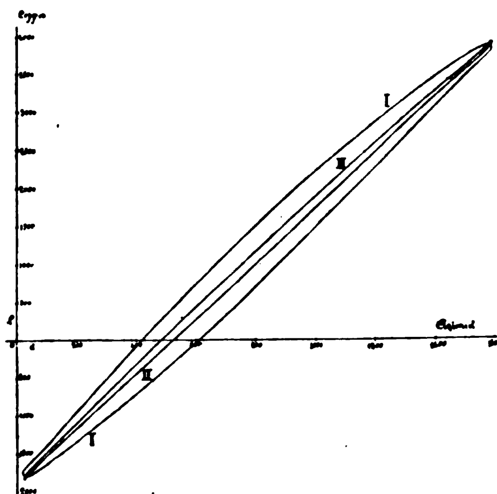


Fig. 8.

la puleggia P (fig. 1) di un' asta di legno sporgente, al fine di mettere l'asse E a 25 cm. dal centro, e produrre così un ciclo unilaterale dell' ampiezza di quasi dieci giri.

Raccolgo, nella seguente tabella, i risultati ottenuti con un filo lungo cm. 51, del diametro di cm. 0,02, rincotto con una corrente di amp. 2,1 per 120ˢ: la sua tensione è di 50 g. A sinistra riporto un ciclo (quinto) con filo naturale, a destra quello (quarto) ottenuto dopo che esso ha assorbito l' idrogeno. Il periodo della torsione alternativa è di 765ˢ; la temperatura media 21°,2 C. Il cerchio D' D' è diviso in tre parti uguali, ma io riferirò le letture di 240° in 240°.

CICLO QUINTO		CICLO QUARTO	
α	C	α	C
6°,8	— 6114	18°,5	— 7078
121,0	— 5340	131,8	— 6226
344,9	— 3564	359,4	— 4300
581,0	— 1881	589,6	— 2657
812,0	— 271	821,7	— 1253
1044,3	1115	1055,8	200
1276,2	2549	1285,0	1735
1510,1	3600	1517,7	3018
1744,0	4601	1750,8	4182
1978,9	5406	1983,7	5316
2214,1	6109	2217,5	6240
2449,2	6805	2451,8	7026
1685,0	7361	2685,8	7778
2920,3	7927	2920,8	8340
3155,8	8408	3155,1	8900
↓ 3272,7	8636	3391,7	9197
↑ 3400,0	7964	3397,4	8733
3174,9	6003	3170,4	6933
2944,9	4458	2941,6	5320
2714,7	2803	2711,8	3665
2482,3	1472	2482,0	2353
2249,7	144	2250,7	812
2014,8	— 774	2017,6	— 434
1783,0	— 2234	1784,6	— 1683
1547,9	— 3087	1550,9	— 2800
1313,1	— 3967	1316,8	— 3805
1077,6	— 4700	1082,9	— 4790
841,0	— 5240	847,3	— 5489
604,7	— 5801	611,5	— 6214
367,7	— 6281	377,4	— 6931
130,5	— 6635	141,5	— 7460
11,6	— 6800	21,6	— 7650

Dopo aver tenuto in corto circuito il voltametro per un 70 ore, il filo ha dato un ciclo identico a quello di partenza (quinto).

Se nel piano azimut-coppia si rappresentano questi risultati, si ottiene la fig. 4, nella quale la curva II è propria del filo che ha occluso l' idrogeno.

Essa ci mostra come, anche per torsioni grandi, l' assorbimento produce una *diminuzione* di area del ciclo. In tal caso

però questa diminuzione sarebbe molto minore di quella che si riscontra per torsioni più piccole.

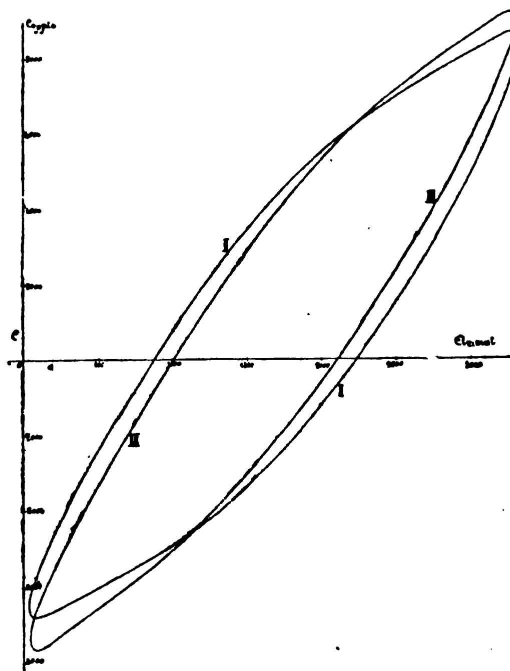


Fig. 4.

Dovendo interrompere queste ricerche, non ho potuto esaminare, com' era mia intenzione, se e per quali torsioni un filo che ha occluso l' idrogeno si comporti come un solido perfetto, e se, per torsioni di molti giri, l' influenza dell' idrogeno assorbito possa annullarsi. Era pure da vedersi se essa dipenda dalla rapidità dell' assorbimento.

Spero di avere l' opportunità di occuparmi in seguito di tali questioni.

Risulta da queste ricerche che, almeno pei fili di palladio che ho usati, l'assorbimento d' idrogeno *diminuisce la perdita di energia nei fenomeni elastici di trazione e di torsione.*

L' idrogeno apporterebbe dunque nel palladio una alterazione simile a quella che il carbonio produce nel ferro.

Messina, R. Liceo Maurolico
Ottobre 1904.

DI UN PRESUNTO FENOMENO D'ELETTROLISI NELLE SCARICHE A PRESSIONE ATMOSFERICA.

Nota di MICHELE RAZETO.

§ 1. Il Sig. A. Garbasso descrisse alcuni anni or sono certe esperienze, che interpretò come una prova della natura elettrolitica delle scariche a pressione ordinaria [1]).

In un recipiente chiuso, sul fondo del quale stanno alcune goccie di una soluzione di cloruro di sodio o di cloruro di litio, si provocano delle scintille fra due fili di platino accostati ad un cm. di distanza. La scarica, che altrimenti sarebbe verdognola in tutta la sua estensione, si colora di giallo o di rosso in prossimità dell' elettrodo negativo, e l' esame spettroscopico rivela nel tratto colorato le righe caratteristiche del sodio o del litio.

Si avrebbe qui, secondo il Garbasso, un fenomeno perfettamente simile a quello offerto dagli elettroliti ordinarii, raccogliendosi il metallo nelle vicinanze del catodo.

Il Kayser, nel suo trattato di spettroscopia, contesta la deduzione [2]), e, senza dare d' altra parte nessuna prova in contrario, si accontenta d' affermare che la natura elettrolitica delle scariche è ben lungi dall' essere accertata.

Recentemente Riecke e Stark pubblicarono a loro volta la descrizione di un' esperienza, che ha con quella del Garbasso una grande analogia [3]).

In una scintilla prodotta nell' aria fra due elettrodi, aventi una differenza di potenziale costante di 3600 volt, i detti Autori introducono una perla di cloruro di sodio o di litio, e trovano che la scarica assume una colorazione uniforme (gialla o rossa) quando la perla è mantenuta vicina al polo positivo, si tinge invece per un breve tratto nella regione catodica se la perla si colloca appunto in prossimità dell' altro polo.

1) A. Garbasso. Archives des Sc. phys. et nat., (4), XI, 1901 e N. C. (5), I, 1901.
2) H. Kayser. Handbuch der Spektroscopie, II, 1902, p. 175.
3) E. Riecke u. J. Stark. Phys. Zeitschrift, V, 1904.

Riecke e Stark vedono a loro volta in tali resultati una prova dell' esistenza e del moto degli joni.

Ora, avendo avuto l' opportunità di occuparmi incidentalmente di queste ricerche, ho raccolto tutta una serie di fatti, i quali sembrano dimostrare che nelle esperienze del Garbasso e di Riecke e Stark l' elettrolisi, secondo ogni verisimiglianza, non ha che vedere, e l' opinione del Kayser dovrebbe essere invece assai più vicina al vero.

Si tratta, secondo l' idea che del fenomeno ho potuto formarmi, di fatti analoghi a quelli notissimi, che si osservano nei miscugli di diversi gas. Come si sa fra tutti i componenti, di regola, uno solo prevale e gli altri non si mostrano all'esame spettroscopico, se circostanze specialissime non concorrono a rivelarne la presenza.

Il Sig. Zonta, in un suo lavoro recente [1]), ha messo in luce un fatto di questa specie, che ha per il caso nostro la massima importanza. Se in un tubo d' azoto è rimasta durante la vuotatura una qualche traccia di vapore di mercurio, le righe proprie del metallo non appariscono nella scarica in condizioni ordinarie; ma quando, per l' influenza del campo magnetico, o per l' introduzione di un condensatore, la temperatura media risulti più elevata lo spettroscopio subito le avverte.

È molto probabile che qualche cosa di simile avvenga nelle esperienze citate più avanti; il litio e il sodio sarebbero presenti in tutta l' estensione della scarica, ma solamente al polo negativo, per l' elevata temperatura, che si rivela del resto con l' incandescenza dell' elettrodo, troverebbero le condizioni opportune a prevalere nello spettro, o anche a manifestarsi al semplice esame dell' occhio.

Ciò è tanto vero che se una scintilla, nelle condizioni sperimentali descritte dal Garbasso, presenta in prossimità dell' elettrodo negativo la colorazione caratteristica del sodio o del litio, e rimane verde in tutta l' altra parte, la si può agevolmente colorare per intero riducendo la sua lunghezza, o

1) P. Zonta. N. C., (5), VII, 1904.

facendo crescere la frequenza delle scariche, o semplicemente aumentando l' intensità di queste ultime.

§ 2. Nelle esperienze che descrivo mi sono valso sempre di un rocchetto di piccole dimensioni, che può dare, con otto accumulatori nel primario, una scintilla massima fra punte di 7 o 8 centimetri. Tale rocchetto ha un interruttore di tipo vecchio, a martello.

Gli elettrodi erano fili di platino d' un millimetro, saldati in testa a bacchettine d' ottone, che entravano normalmente, da una parte e dall' altra, a metà dell' altezza, per le faccie laterali più strette di una cassettina parallelepipeda di vetro, con la base di 8 per 2 e lo spigolo verticale di 8 cm.

La soluzione si può versare sul fondo, ma le esperienze riescono meglio e più rapidamente bagnando addirittura con qualche goccia i due elettrodi. Se la distanza fra le punte di questi è di un centimetro all' incirca si osserva per solito il fenomeno descritto dal Garbasso, ma alle volte la scarica può anche apparire incolora (verdognola) o essere colorata in tutta la sua lunghezza, come vedremo meglio nel seguito.

§ 3. Le esperienze da me fatte si dividono naturalmente in tre serie.

Ho cercato di vedere in primo luogo quale influenza abbia la lunghezza delle scintille; e la tabellina riportata qui appresso dà un' idea del modo in cui procede il fenomeno [1]).

TABELLA 1.

8 accumulatori.

Lunghezza della scarica	Aspetto della scarica
5,5 mm.	rossa per intero
8,0 mm.	rossa per metà
14,0 mm.	verde per intero

1) Si impiega il cloruro di litio.

Le esperienze, perchè la variazione della tinta apparisca ben chiara, devono farsi tutte di seguito, e cioè senza interrompere mai il funzionamento del rocchetto. La cosa riesce bene del resto tanto se l' intervallo di scarica va crescendo di mano in mano, quanto se si batte invece il cammino inverso.

§ 4. Fenomeni al tutto simili possiamo anche osservare variando in luogo della distanza esplosiva la intensità della corrente primaria.

Riproduco in proposito un' altra serie di osservazioni.

TABELLA 2.

Scarica di 6 mm.

Accumulatori nel primario	Aspetto della scarica
8	rossa per intero
7	rossa per metà
6	rossa al catodo
5	verde per intero

Anche in questo caso le esperienze vanno fatte successivamente, senza interrompere le scariche.

§ 5. Da ultimo, lasciando inalterate tutte l'altre condizioni, si rileva con molta facilità l' influenza del ritmo, secondo il quale la corrente viene interrotta.

Appunto per determinare il numero delle oscillazioni del martelletto avevo pensato da principio di valermi semplicemente dell' altezza del suono emesso; ma dovetti riconoscere subito che la cosa non riusciva con qualche sicurezza, salvo che per periodi brevissimi.

Scelsi dunque il partito di determinare dall' altezza del suono una sola frequenza, possibilmente elevata, e di dedurre le altre da questa prima con un metodo indiretto.

A tale scopo legai al martello, per uno dei capi, un cordoncino elastico, della lunghezza di due metri all' incirca, rac-

comandandone poi l' altro capo ad un chiodo infisso nel muro.

Disposi le cose per modo che il cordoncino riuscisse orizzontale, e perpendicolare all' asse del rocchetto, sul prolungamento dunque della molla, che costituisce il manico del martelletto interruttore.

Il cordoncino era teso, ma non troppo, così che i moti del martello potevano ancora farsi liberamente.

In tali condizioni, e per alcune frequenze bene determinate, apparivano sul cordoncino delle onde stazionarie nettissime; e di queste mi valsi appunto per calcolare i rapporti dei periodi.

Un primo esame mostrò che con i miei apparecchi si potevano ottenere al massimo, cioè per il moto più frequente del martelletto, 7 nodi sopra il cordone; ma diminuendo la frequenza risultavano delle onde stazionarie con 6 nodi, e poi via via con 5, con 4, ed anche meno.

In quel caso dunque delle oscillazioni rapidissime determinai l' altezza del suono, che l' interruttore emetteva; e fu trovato essere il *si bemolle* della seconda ottava, alla quale nota corrisponde una frequenza di 230,4 oscillazioni per secondo.

Da questo primo numero seguono adesso con molta facilità, e senza che sia necessario di pensare più alle altezze dei suoni, i dati corrispondenti per tutti gli altri casi.

Poichè rimangono fermi, come è naturale, i due estremi del sistema vibrante, avremo subito:

$$\lambda_1 (N_1 + 1) = \lambda_2 (N_2 + 1) = \lambda_3 (N_3 + 1) = \dots ,$$

ove con $\lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 \dots$ si indichino le lunghezze d' onda, con $N_1 . N_2 . N_3 \dots$ i numeri dei nodi esistenti sopra il cordoncino (i capi esclusi).

Che se in luogo delle λ si introducono le frequenze $n_1 . n_2 . n_3 \dots$ viene anche:

$$\frac{1}{n_1} (N_1 + 1) = \frac{1}{n_2} (N_2 + 1) = \frac{1}{n_3} (N_3 + 1) = \dots ,$$

e così si forma la tavola seguente:

N	n
7	230,4
6	$230{,}4 \cdot {}^{7}/_{8} = 201{,}6$
5	$230{,}4 \cdot {}^{6}/_{8} = 172{,}8$
4	$230{,}4 \cdot {}^{5}/_{8} = 144{,}0$

È quindi facile comprendere, senza altre spiegazioni, come fosse condotta la serie di esperienze, i cui resultati ho raccolto nella terza tabella.

TABELLA 3.

8 accumulatori. — Scarica di 6 mm.

Frequenza dell' interruzione	Aspetto della scarica
230,4	rossa per intero
201,6	rossa per metà
172,8	verde per intero
144,0	verde per intero

§ 6. Ho riprodotto a colori nella tavola annessa a questa nota le apparenze tipiche, che chiamavo più avanti :

rossa al catodo (fig. 1),
rossa per metà (fig. 2),
e rossa per intero (fig. 3);

le figure sono alquanto ingrandite e corrispondono, come bene si comprende, al caso in cui si adopera la soluzione di cloruro di litio. Non ho bisogno di ricordare che il fenomeno si presenta sotto l' identica forma nelle tre serie di esperienze descritte ai paragrafi 3, 4 e 5.

§ 7. Che nel fenomeno del quale ci occupiamo l'elettrolisi e il moto degli joni non abbiano nulla a vedere si può mostrare del resto con argomenti di altra natura.

Se realmente il metallo si raccoglie nelle vicinanze del catodo perchè la corrente lo trasporta, la colorazione caratteristica non deve apparire subito, ma formarsi invece di mano in mano, col passare del tempo. Nell' ipotesi nostra all' incontro non si può affermare nulla di sicuro, le particolari condizioni, che, secondo il mio modo di vedere, permettono al sodio e al litio di manifestarsi, potrebbero infatti essere presenti fin da principio, o venire raggiunte solamente nel seguito.

Ne concludiamo dunque che se la scarica apparirà incolora nei primi istanti, e solo più tardi prenderà la tinta speciale, che l' occhio vede all' esame diretto, non potremo dedurre nulla nè in favore dell' una nè in pro' dell' altra teoria; se invece la scintilla è colorata fino da principio nelle vicinanze del catodo l' ipotesi elettrolitica si dovrà rigettare.

Quest' ultimo caso appunto si verifica, e per esserne persuasi basta esaminare le scariche con uno specchio girante.

Mentre nelle condizioni sperimentali da me descritte le scintille sembrano continue, con lo specchio si riconosce subito che la luminosità è invece intermittente; così, per esempio, alla scarica *rossa al catodo* (fig. 1) corrisponde una serie di imagini discrete, all' incirca secondo l' aspetto della figura 4.

L' esame di codesta figura è istruttivo da più punti di vista.

In condizioni normali la scarica appare costituita da « una aureola diffusa, di colore verde oliva, solcata da poche striscie luminose vivacissime [1]) » e ora si apprende quale sia l'ufficio, che coteste scintilline tengono nel fenomeno. Ognuna di esse fora alla sua volta il dielettrico, e prepara il passaggio alla scarica rimanente.

Quasi subito le condizioni necessarie per l' incandescenza del litio sono raggiunte al catodo, ma il nastro rosso, in cui si sviluppa la parte colorata della figura 1, *s'allontana progressivamente dall' elettrodo negativo.* Non è lecito pensare dunque che il metallo venga raccolto a poco, e per un fenomeno di trasporto.

1) A. Garbasso, l. c.

§ 8. Restano le esperienze di Riecke e Stark, ma esse pure si spiegano senza difficoltà, secondo il nostro modo di vedere.

Perchè quando la perla si introduce in vicinanza dell' anodo, niuna meraviglia che il metallo in eccesso si manifesti all' occhio, malgrado le condizioni poco favorevoli; e che più avanti verso l' elettrodo negativo la concentrazione minore trovi in altre circostanze un compenso adeguato. Ma se portiamo invece la perla presso il catodo non possiamo pretendere, naturalmente, che dall' altra parte il metallo arrivi in quantità bastevole per colorare la scarica.

§ 9. Ad ogni modo, e per maggiore sicurezza, io mi sono preoccupato di far vedere direttamente che presso il catodo le condizioni sono più favorevoli all' incandescenza del metallo.

La prova può essere raggiunta nel modo che segue.

Si sa che formando l' arco voltaico fra elettrodi metallici si osservano in diverse regioni degli spettri diversi, perchè certe righe, o, meglio, certe serie di righe sembrano più facili ad eccitare, di modo che le si riscontrano dovunque; e altre linee invece esigono per potersi manifestare delle circostanze eccezionali.

Così, per esempio, delle tre righe verdi dello spettro del rame la terza (la più rifrangibile), che presso i poli è vinta in splendore dalle sue compagne, rimane sola superstite nelle regioni esterne dell' arco [1]).

Ora una cosa affatto simile si può ripetere per le scintille prodotte nelle condizioni delle mie precedenti esperienze, quando agli elettrodi di platino si sostituiscono dei fili di rame di piccolo diametro.

Presso il catodo si vedono allo spettroscopio le tre righe verdi e la terza è più pallida; presso il filo positivo la prima e la seconda sono scomparse e l' ultima sola rimane.

La regione catodica, nelle scintilline studiate dal Garbasso, e da Riecke e Stark, e da me, si comporta dunque, rispetto

1) A. Garbasso. Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, (2), LIV, 1903.

Fig. 1



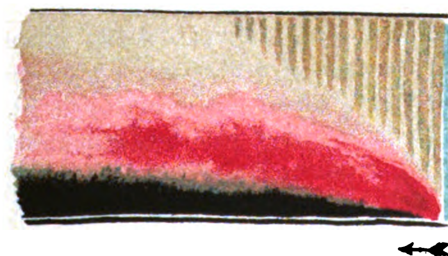
Fig. 2



Fig. 3



Fig. 4





alla regione positiva, come la parte centrale di un arco in confronto dei tratti più esterni.

Genova, Istituto Fisico della R. Università
Dicembre 1904.

LE SCARICHE OSCILLANTI NEI SISTEMI DI CONDUTTORI COMPLESSI E LA TEORIA ELETTROMAGNETICA DELL' ANALISI SPETTRALE.

Memoria di ANTONIO GARBASSO.

CAPITOLO QUARTO.

Scariche in un sistema di conduttori complessi.

§ 25. *Posizione del problema e sua soluzione generale.* — Imagineremo che il sistema comprenda un numero qualunque a di conduttori, uguali o no, poco importa.

Chiameremo α, β gli indici correnti dei conduttori; π, ρ, σ, τ gli indici correnti delle capacità; μ, ν gli indici correnti dei fili.

Ogni conduttore si distinguerà con un indice solo (come α).

Ogni capacità con due indici (come α, π), il primo relativo al conduttore e il secondo alla capacità stessa; e ogni coppia di capacità con quattro indici (come α, π, β, σ). Ogni filo si distinguerà pure con quattro indici (come α, π, ρ, μ), il primo relativo al conduttore, il secondo e il terzo alle capacità che il filo congiunge, il quarto al filo stesso; finalmente ogni coppia di fili si distinguerà con otto indici (come α, π, ρ, μ, β, σ, τ, ν), i primi quattro relativi al primo filo e gli ultimi al secondo.

Per le cariche, i coefficienti di potenziale, le capacità, le resistenze, i coefficienti di autoinduzione, le correnti e i coefficienti di induzione mutua manteniamo gli stessi simboli di prima.

Si osserverà espressamente che $i_{\alpha,\pi,\rho,\mu}$ è la corrente che, nel conduttore α-esimo, va dalla π-esima alla ρ-esima capacità, seguendo il μ-esimo filo.

Si avrà:

$$(1) \qquad \begin{aligned} i_{\alpha,\pi,\pi,\mu} &= 0 , \\ i_{\alpha,\pi,\rho,\mu} &= - i_{\alpha,\rho,\pi,\mu} . \end{aligned}$$

Le equazioni del problema sono divise in due serie; la prima serie è relativa ad ogni capacità e si scrive:

$$(2) \qquad D\, q_{\alpha,\pi} + \Sigma^\rho \, \Sigma^\mu \, i_{\alpha,\pi,\rho,\mu} = 0 ,$$

la seconda è relativa ad ogni filo e si scrive:

$$(3) \qquad \Sigma^\beta \, \Sigma^\tau \, K_{\alpha,\rho,\beta,\tau} q_{\beta,\tau} - \Sigma^\beta \, \Sigma^\sigma \, K_{\alpha,\pi,\beta,\sigma} \, q_{\beta,\sigma} + \\ + \Sigma^\beta \, \Sigma^\sigma \, \Sigma^\tau \, \Sigma^\nu \, N_{\alpha,\pi,\rho,\mu,\beta,\sigma,\tau,\nu} i_{\beta,\sigma,\tau,\nu} = 0 ,$$

intendendo che sia:

$$N_{\alpha,\pi,\rho,\mu,\alpha,\pi,\rho,\mu} = R_{\alpha,\pi,\rho,\mu} + D\, L_{\alpha,\pi,\rho,\mu} ,$$
$$N_{\alpha,\pi,\rho,\mu,\beta,\sigma,\tau,\nu} = D\, M_{\alpha,\pi,\rho,\mu,\beta,\sigma,\tau,\nu} .$$

Il numero complessivo di queste equazioni si ottiene sommando il numero totale delle capacità col numero totale dei fili; esse sono dunque tante come le incognite q ed i. Il resultato dell' eliminazione si esprime di nuovo applicando a ciascuna q ed a ciascuna i il determinante dei coefficienti. Ora, poichè ogni suo elemento è al massimo di primo grado in D, il determinante sarà una funzione di D di grado non superiore a

$$\sum_1^a {}^\alpha (p_\alpha + m_\alpha) .$$

In realtà però, svolgendo, si troverebbe che il grado è minore, e la cosa può anche riconoscersi a priori. Si avrà infatti per le (1) e (2):

$$D\, \Sigma^\pi \, q_{\alpha,\pi} = - \Sigma^\pi \, \Sigma^\rho \, \Sigma^\mu \, i_{\alpha,\pi,\rho,\mu} = 0 ,$$

per ogni valore di α, le quali equazioni significano che la carica complessiva su ogni conduttore rimane inalterata.

È quindi possibile fare in modo, con semplici addizioni di linee, che il D risulti fattore in a orizzontali del determinante; allora il grado (Γ) di quest' ultimo diventa:

$$\Gamma = \sum_1^a {}^\alpha (p_\alpha + m_\alpha) - a .$$

Se dunque si studia un sistema di conduttori comunque complessi ogni sua carica ed ogni sua corrente è determinata da un' equazione differenziale lineare ed omogenea (la stessa per tutte le variabili), il cui ordine si ottiene aggiungendo il numero delle capacità a quello dei fili, e sottraendo dalla somma il numero dei conduttori, che costituiscono il sistema.

La caratteristica di tale equazione (che per brevità chiameremo nel seguito *caratteristica del sistema*) si scrive ponendo senz' altro a zero il determinante e considerando in esso il D come un' incognita e non più come un simbolo operatorio; avrà in generale il grado $\sum_1^a{}^\alpha (p_\alpha + m_\alpha) - a$.

Per i singoli conduttori costituenti il sistema il grado della caratteristica è:

$$\gamma_\alpha = p_\alpha + m_\alpha - 1,$$

viene dunque:

$$\Gamma = \sum_1^a{}^\alpha \gamma_\alpha .$$

Si arriva così ad un teorema, che è fondamentale per la nostra teoria, e cioè: *il grado della caratteristica di un sistema di conduttori è la somma dei gradi delle caratteristiche relative ai conduttori, che lo costituiscono.*

La cosa è vera in particolare se ogni γ^α è pari, e quindi *un sistema emette uno spettro, che contiene in generale un numero di righe uguale alla somma di quelle, che compongono gli spettri dei suoi conduttori.*

In pratica il procedimento di calcolo che abbiamo seguito non suole essere conveniente. È più comodo eliminare le cariche dalle (3) per mezzo delle (2); si ottiene così un sistema di $\sum_1^a{}^\alpha m_\alpha$ equazioni fra le $\sum_1^a{}^\alpha m_\alpha$ correnti, e l' ordine del determinante si riduce anche a $\sum_1^a{}^\alpha m_\alpha$. Naturalmente con questo non muta la natura nè il grado della caratteristica.

Converrà anche distinguere i diversi fili con un solo numero progressivo, e mettere le (3) sotto la nuova forma:

$$(4) \qquad \sum_{1}^{n}{}^{\nu}\, P_{\mu,\nu}\, i_\nu = 0\,, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n, \qquad n = \sum_{1}^{a}{}^{\alpha}\, m_\alpha\,,$$

la caratteristica si riduce allora all'aspetto semplice:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \ldots & P_{1,n} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \ldots & P_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n,1} & P_{n,2} & \ldots & P_{n,n} \end{vmatrix} = 0\,.$$

§ 26. *Schermo di risonatori.* — Per dare un primo esempio del modo, in cui si utilizza nei casi pratici la teoria esposta nel paragrafo precedente, ne farò l'applicazione ad un sistema, del quale mi sono occupato in una nota, che fu accolta a suo tempo negli Atti dell'Accademia di Torino (XXVIII, 1893).

Sopra una tavoletta di legno avevo disposto in sei righe orizzontali 186 risonatori rettilinei, senza intervallo, tutti uguali, costituiti da un filo di rame terminato da due dischi di latta; sperimentando con questo schermo trovai che esso rifletteva assai bene i raggi di forza elettrica, ma la riflessione si poteva constatare anche per mezzo di secondarii dotati di periodo assai diverso da quello, che era proprio degli elementi del sistema.

Dedussi da questo resultato che « quando più risonatori sono messi molto vicini gli uni agli altri le cose succedono *come se* la loro radiazione fosse multipla ».

L'accordo fra l'esperienza e la teoria è manifesto; il teorema, che abbiamo dimostrato, porta infatti a concludere, senza nemmeno far calcoli, che nel caso attuale, avendosi nel sistema a risonatori con una oscillazione, ogni corrente deve risultare dalla somma di a oscillazioni, le quali, in generale, saranno tutte differenti fra loro, e differenti pure dall'oscillazione propria di ciascun elemento dello schermo, quando lo si consideri isolato.

Gli svolgimenti analitici si fanno del resto con tutta facilità, almeno se si trascurano le influenze mutue elettrostatiche.

Le equazioni (1) e (2) prendono infatti la forma:

$$\begin{cases} D\, q_{\alpha,1} + i_\alpha = 0\,, \\ D\, q_{\alpha,2} - i_\alpha = 0\,, \end{cases}$$

$$\frac{1}{C_{\alpha,1}} q_{\alpha,1} - \frac{1}{C_{\alpha,2}} q_{\alpha,2} - \sum_1^a {}^\beta\, N_{\alpha,\beta}\, i_\beta = 0\,, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, a$$

e però eliminando le q dal sistema (3) e introducendo ancora le notazioni:

$$D\, N_{\alpha,\beta} = P_{\alpha,\beta}\,, \qquad \alpha \text{ diverso da } \beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, a$$

$$D\, N_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{C_{\alpha,1}} + \frac{1}{C_{\alpha,2}} = P_{\alpha,\alpha}\,, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, a$$

si ottiene:

$$\sum_1^a {}^\beta\, P_{\alpha,\beta}\, i_\beta = 0\,.$$

Ogni i_α è dunque un' integrale dell' equazione:

$$\begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \ldots & P_{1,a} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \ldots & P_{2,a} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{a,1} & P_{a,2} & \ldots & P_{a,a} \end{vmatrix} i_\alpha = 0\,,$$

che sarà lineare omogenea e dell' ordine $2a$, come avevamo previsto.

Se i risonatori dello schermo sono tutti uguali si possono ottenere assai elegantemente i periodi nel modo che segue.

Avremo anzitutto:

$$P_{\alpha,\beta} = D^2 M_{\alpha,\beta}$$

e, trascurando le resistenze:

$$P_{\alpha,\alpha} = D^2 L + \frac{2}{C}\,;$$

la caratteristica diventa dunque:

$$\begin{vmatrix} D^2 L + \frac{2}{C} & D^2 M_{1,2} & \ldots & D^2 M_{1,a} \\ D^2 M_{2,1} & D^2 L + \frac{2}{C} & \ldots & D^2 M_{2,a} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D^2 M_{a,1} & D^2 M_{a,2} & \ldots & D^2 L + \frac{2}{C} \end{vmatrix} = 0\,,$$

vale a dire:

$$\begin{vmatrix} L + \frac{2}{CD^2} & M_{1,2} & \dots & M_{1,a} \\ M_{2,1} & L + \frac{2}{CD^2} & \dots & M_{2,a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{a,1} & M_{a,2} & \dots & L + \frac{2}{CD^2} \end{vmatrix} = 0 ,$$

o ancora:

$$\begin{vmatrix} L + \frac{2x}{C} & M_{1,2} & \dots & M_{1,a} \\ M_{2,1} & L + \frac{2x}{C} & \dots & M_{2,a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{a,1} & M_{a,2} & \dots & L + \frac{2x}{C} \end{vmatrix} = 0 ,$$

con:

$$x = \frac{1}{D^2} .$$

Se indichiamo con:

$$x_\alpha$$

$$(\alpha = 1, 2 \dots a)$$

le radici dell' ultima equazione, i periodi dello spettro emesso dallo schermo si determineranno con la formola:

$$T_\alpha = 2 \pi \sqrt{- x_\alpha} .$$

Poniamo adesso:

$$x = - \left(\frac{LC}{2} + y \right)$$

e la caratteristica prenderà la forma semplice:

$$(*)\qquad \begin{vmatrix} -\frac{2y}{C} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,\alpha} \\ M_{2,1} & -\frac{2y}{C} & \cdots & M_{2,\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{\alpha,1} & M_{\alpha,2} & \cdots & -\frac{2y}{C} \end{vmatrix} = 0 ,$$

e però i periodi si possono calcolare anche con la:

$$T_\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2} + y_\alpha} ,$$

essendo le y_α radici della (*).

Annullandosi le $M_{\alpha,\beta}$ si annullano naturalmente tutte le y_α; e se le $M_{\alpha,\beta}$ sono piccole davanti alla L saranno piccole le y_α davanti al termine $\frac{LC}{2}$. Allora si può scrivere:

$$T_\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2}} \left(1 + \frac{y_\alpha}{LC}\right),$$

$$= T\left(1 + \frac{y_\alpha}{LC}\right),$$

ove con T si indichi il periodo proprio dell' elemento isolato. Così le:

$$\frac{y_\alpha}{LC}$$

rappresentano gli *spostamenti*, i quali fanno passare dalla riga primitiva alle linee contenute nella banda che l'ha sostituita.

§ 27. *Sistema di due conduttori qualunque.* — La teoria generale dei sistemi di conduttori non presenta nessuna difficoltà analitica; solamente i calcoli sono lunghi e laboriosi.

Una semplificazione considerevole si introduce ammettendo che le azioni elettrostatiche fra capacità appartenenti a circuiti distinti siano trascurabili; tale ipotesi vogliamo appunto accettare, e la manterremo nel seguito, quando non si avverta

espressamente il contrario. Con questo non si altera ad ogni modo l' andamento generale dei fenomeni, come avremo occasione di avvertire a suo tempo.

Se si sono scritte le equazioni (II, 5) per i diversi conduttori, che compongono il sistema, è molto facile costruire la (IV, 5); in realtà l' eliminazione delle cariche dalle equazioni (IV, 3) si fa gruppo per gruppo, quindi le equazioni (IV, 4) non sono che il complesso dei sistemi (II, 4) modificati nel senso che in ciascuna equazione si devono aggiungere dei termini della forma

$$D^2 M_{\mu,\nu} i_\nu ,$$

che rappresentano l' azione induttiva, che i fili appartenenti ad *altri* conduttori esercitano sopra il filo a cui l' equazione si riferisce.

Si abbiano ad esempio due conduttori in presenza e uno contenga m fili e l' altro ne contenga r; distinguiamo i primi coi numeri da 1 ad m, i secondi coi numeri da $m+1$ ad $m+r$.

Le equazioni (II, 5) prenderanno la forma:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \cdots & P_{1,m} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \cdots & P_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ P_{m,1} & P_{m,2} & \cdots & P_{m,m} \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} P_{m+1,m+1} & P_{m+1,m+2} & \cdots & P_{m+1,m+r} \\ P_{m+2,m+1} & P_{m+2,m+2} & \cdots & P_{m+2,m+r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ P_{m+r,m+1} & P_{m+r,m+2} & \cdots & P_{m+r,m+r} \end{vmatrix} = 0 ,$$

e la (IV, 5) si scriverà senz' altro:

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,m} & D^2M_{1,m+1} & D^2M_{1,m+2} & \dots & D^2M_{1,m+r} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,m} & D^2M_{2,m+1} & D^2M_{2,m+2} & \dots & D^2M_{2,m+r} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ P_{m,1} & P_{m,2} & \dots & P_{m,m} & D^2M_{m,m+1} & D^2M_{m,m+2} & \dots & D^2M_{m,m+r} \\ D^2M_{m+1,1} & D^2M_{m+1,2} & \dots & D^2M_{m+1,m} & P_{m+1,m+1} & P_{m+1,m+2} & \dots & P_{m+1,m+r} \\ D^2M_{m+2,1} & D^2M_{m+2,2} & \dots & D^2M_{m+2,m} & P_{m+2,m+1} & P_{m+2,m+2} & \dots & P_{m+2,m+r} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ D^2M_{m+r,1} & D^2M_{m+r,2} & \dots & D^2M_{m+r,m} & P_{m+r,m+1} & P_{m+r,m+2} & \dots & P_{m+r,m+r} \end{vmatrix}=0.$$

Dividiamo quest' ultimo determinante in due matrici, una di m e l' altra di r orizzontali, e sviluppiamolo secondo i minori estratti dalla prima.

Fra i minori ci si presenta anzitutto $\mathbf{M}$ e il suo complementare è $\mathbf{R}$; sicchè una prima serie di termini nello sviluppo del determinante grande è riassunta nel prodotto $\mathbf{M}\,\mathbf{R}$.

In tutti gli altri minori, che si possono estrarre dalla matrice superiore, vi sarà almeno una verticale formata coi termini aggiunti della forma $D^2 M_{\mu,\nu}$; e la stessa cosa si deve dire dei complementari di questi altri minori; sicchè i termini dello sviluppo del nostro determinante, che non sono già contenuti nel prodotto $\mathbf{M}\,\mathbf{R}$, hanno almeno due $M_{\mu,\nu}$ a fattore, potremo dunque scrivere:

$$\mathbf{A}=\mathbf{M}\,\mathbf{R}+\Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'}$$

intendendo per le $G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}$ dei polinomii, i cui termini sono al minimo di ordine zero nei coefficienti $M_{\mu,\nu}$.

Se ora le $M_{\mu,\nu}$ sono piccole rispetto alle induttanze il secondo termine dell' espressione di $\mathbf{A}$ è piccolissimo rispetto al primo. Ne viene dunque che *se due conduttori differenti si trovano in presenza (e non sono troppo vicini) lo spettro, che essi emettono, è poco diverso da quello, che si otterrebbe sopraponendo gli spettri, che ciascuno fornisce quando è isolato* [1]).

1) Un teorema simile continua a valere se si tiene conto delle azioni elettrostatiche fra capacità appartenenti a conduttori diversi; purchè si supponga che le K relative a coppie prese in circuiti distinti siano piccole rispetto alle K delle coppie appartenenti ad un medesimo circuito.

§ 28. *Due conduttori ad una sola oscillazione.* — Gli spostamenti, che le righe di un dato conduttore subiscono per la presenza di un secondo conduttore di diversa natura, si lasciano calcolare agevolmente in alcuni casi semplici. In tali problemi si possono anzi fare, senza che i calcoli diventino troppo prolissi, delle ipotesi più larghe di quelle adottate nel paragrafo precedente.

Supponiamo anzitutto che si abbiano due circuiti, del tipo di quello che fu studiato nel paragrafo 5 (fig. 1 *a*); anzi per semplicità vogliamo ammettere che:

a) i due fili siano uguali;

b) non vi siano azioni fra cariche libere in uno stesso conduttore;

c) la prima capacità agisca su la prima, la seconda su la seconda, e i coefficienti di potenziale relativi alle due coppie siano uguali.

Chiamando M, al solito, il coefficiente di induzione mutua, K_1, K_2 e H i coefficienti di potenziale, e ponendo:

$$S_1 = (R + L\,D)\,D + 2\,K_1\,,$$
$$S_2 = (R + L\,D)\,D + 2\,K_2\,,$$
$$s = M\,D^2 + 2\,H\,,$$

verrà senz' altro:

$$S_1\,i_1 + s\,i_2 = 0\,,$$
$$s\,i_1 + S_2 i_2 = 0\,;$$

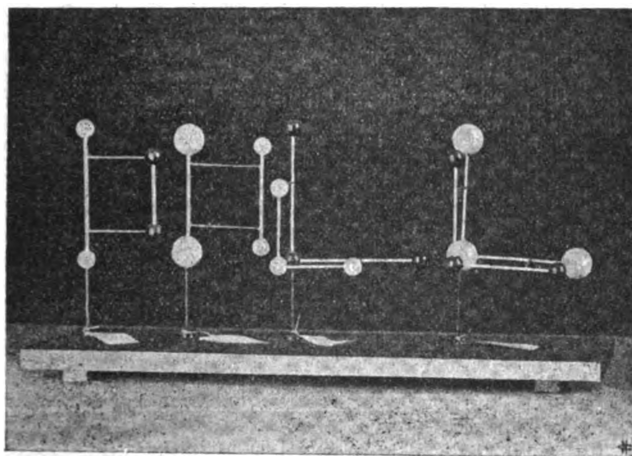
e però, come caratteristica del sistema:

$$\begin{vmatrix} S_1 & s \\ s & S_2 \end{vmatrix} = S_1\,S_2 - s^2 = 0\,.$$

Svolgendo e trascurando le resistenze si ottengono i periodi:

$$T^*, T^{**} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{2\,(L^2 - M^2)}{(K_1+K_2)L - 2HM \pm \sqrt{[(K_1+K_2)L - 2HM]^2 - 4(K_1K_2 - H^2)(L^2 - M^2)}}}\,.$$

Al caso trattato corrisponde la figura 3 *b*; formole simili si ottengono supponendo invece uguali le capacità e diversi i fili (fig. 3 *a*).



a *b* *c* *d*

Fig. 3. — *a*) e *b*) Sistemi di due conduttori ad una oscillazione; emettono spettri di due righe. *c*) e *d*) Sistemi di due conduttori a due oscillazioni; emettono spettri di quattro righe.

§ 29. *Due conduttori a due oscillazioni.* — In secondo luogo si potrebbero prendere due conduttori del tipo di quello che è rappresentato dalla figura 1 *b*.

In armonia con ciò che si è fatto al paragrafo precedente ammettiamo che:

a) i quattro fili siano uguali;

b) il primo filo agisca sul primo, il secondo sul secondo, e i coefficienti di induzione relativi alle due coppie siano uguali;

c) non vi siano azioni fra cariche libere in uno stesso conduttore;

d) la prima capacità agisca su la prima, la seconda su la seconda, la terza su la terza, e i coefficienti di potenziale relativi alle tre coppie siano uguali.

Con le notazioni ordinarie (dette $i_{1,1}$ e $i_{1,2}$ le correnti del primo, $i_{2,1}$ e $i_{2,2}$ le correnti del secondo circuito) verrà:

$$S_1\, i_{1,1} - K_1\, i_{1,2} + s\, i_{2,1} - H\, i_{2,2} = 0\,,$$
$$-K_1\, i_{1,1} + S_1\, i_{1,2} - H\, i_{2,1} + s\, i_{2,2} = 0\,,$$
$$s\, i_{1,1} - H\, i_{1,2} + S_2 i_{2,1} - K_2 i_{2,2} = 0\,,$$
$$-H\, i_{1,1} + s\, i_{1,2} - K_2\, i_{2,1} + S_2 i_{2,2} = 0\,,$$

e quindi:

$$\begin{vmatrix} S_1 & -K_1 & s & -H \\ -K_1 & S_1 & -H & s \\ s & -H & S_2 & -K_2 \\ -H & s & -K_2 & S_2 \end{vmatrix} =$$

$$=(S_1S_2+K_1K_2-s^2-H^2-K_1S_2-K_2S_1+2Hs)(S_1S_2+K_1K_2-s^2-H^2+$$
$$+K_1S_2+K_2S_1-2Hs)=0.$$

Svolgendo, trascurando le resistenze, e ponendo:

$$\tau=\frac{2\,(L^2-M^2)}{(K_1+K_2)L-2HM\pm\sqrt{[(K_1+K_2)L-2HM]^2-4(K_1K_2-H^2)(L^2-M^2)}}\,,$$

si ottengono i periodi:

$$T_1^{*},\ T_1^{**}=2\,\pi\sqrt{\tau}\,,$$

$$T_2^{*},\ T_2^{**}=2\,\pi\sqrt{\frac{1}{3}\,\tau}\,.$$

Il caso trattato corrisponde alla figura 3 *d*; formole simili si ottengono supponendo invece uguali le capacità e diversi i fili (fig. 3 *c*).

§ 30. *Due conduttori a tre oscillazioni.* — Il problema immediatamente successivo, nel quale si pongono in presenza due conduttori simili a quello della figura 1 *c*, non presenta nessuna difficoltà essenziale, ma i calcoli sono lunghi e faticosi.

I periodi vengono determinati dalle formole:

$$T_1^*, T_1^{**} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}}\tau},$$

$$T_2^*, T_2^{**} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2}\tau},$$

$$T_3^*, T_3^{**} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{2}}\tau}. \qquad [1]$$

§ 31. *Sistema di due conduttori uguali.* — Quando i due conduttori in presenza hanno la stessa forma e la stessa grandezza, ragionando come al paragrafo 27, si può dimostrare che la caratteristica del sistema si svolge secondo una formola del tipo:

$$\Lambda = \mathbf{M}^2 + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'}.$$

E vuol dire che *se si affacciano due conduttori uguali lo spettro che essi mandano si ottiene da quello, che ciascuno dei due fornirebbe quando fosse isolato, sostituendo ad ogni riga una coppia (doublet).*

Con quale legge poi si deduca il doublet dalla riga, che gli dà origine, non è facile dire, almeno in generale; ma in un caso particolare notevole (trascurando le azioni elettrostatiche) si giunge senza molti calcoli ad un resultato semplice ed elegante.

Si consideri anzitutto un conduttore costituito da $m+1$ capacità uguali, riunite da m fili, anche uguali fra loro; ogni capacità sia incontrata da due fili, salvo la prima e l'ultima. Supponiamo ancora che le cose siano disposte per modo che l'induzione mutua sia trascurabile davanti all'autoinduzione: questo si verifica rigorosamente nei conduttori studiati ai paragrafi 6 e 7 e può verificarsi per approssimazione in una infinità di altri apparecchi, come si è avvertito a suo tempo.

1) Si veda in proposito una mia nota negli Atti della Società Ligustica di Scienze Naturali, 15, 1904.

Con i soliti simboli la caratteristica del nostro problema [l' equazione (II, 5)] si scriverà:

$$\mathbf{M}(\mathrm{S}) = \begin{vmatrix} S & r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ r & S & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & S & r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r & S & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r & S \end{vmatrix} = 0.$$

A questo primo conduttore se ne affacci un secondo identico in tutto, in modo che il μ-esimo filo agisca solamente sul μ-esimo, e i coefficienti di induzione mutua per le singole coppie siano uguali. Di nuovo la cosa si può fare rigorosamente coi tre conduttori studiati ai paragrafi 5, 6 e 7 e per approssimazione con molti altri.

La (IV, 5) del sistema prenderà in generale la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} S & r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ r & S & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & S & r & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r & S & r & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r & S & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s \\ s & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & S & r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & r & S & r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & r & S & r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r & S & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & r & S \end{vmatrix} = 0.$$

Si imagini adesso di dividere il determinante in due matrici di m orizzontali, e si aggiungano alle linee della prima le linee della seconda ordinatamente. Fatto questo si spezzi il determinante in due matrici di m verticali, e si tolgano dalle colonne della seconda le colonne della prima ordinatamente.

Risulterà :

$$A=\begin{vmatrix}
S+s & r & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0\\
r & S+s & r & 0\dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0\\
0 & r & S+s & r\dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & 0\dots r & S+s & r & 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & r & S+s & 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0\\
s & 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0 & S-s & r & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0\\
0 & s & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0 & r & S-s & r & 0\dots 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & s & 0\dots 0 & 0 & 0 & 0 & r & S-s & r\dots 0 & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\dots r & S-s & r\\
0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0\dots 0 & r & S-s
\end{vmatrix}=0,$$

e quindi senz' altro :

$$\mathbf{A}=[\mathbf{M}(S+s)]\,.\,[\mathbf{M}(S-s)]\,.$$

Se dunque i periodi delle righe, che emette il conduttore isolato, sono certe funzioni dell' induttanza :

$$T_1(L)\,.\,T_2(L)\dots T_m(L),$$

i doublets relativi al sistema di due conduttori uguali si determineranno con le formole :

$$\begin{cases}T_1(L+M)\\ T_1(L-M)\end{cases}\!\!.\qquad\begin{cases}T_2(L+M)\\ T_2(L-M)\end{cases}\dots\qquad\begin{cases}T_m(L+M)\\ T_m(L-M)\end{cases}\!\!.$$

Con un ragionamento semplice, fondato su la considerazione delle dimensioni, si potrà poi riconoscere che le funzioni T devono essere proporzionali alla radice quadrata dell' argomento, e ne seguirà che il rapporto dei periodi, per le due righe di uno stesso doublet, è costante in tutto lo spettro e uguale a :

$$\sqrt{\frac{L+M}{L-M}};$$

in altre parole, essendo T_μ il periodo di una oscillazione propria del conduttore isolato, il doublet, in cui la riga si sdoppia quando al primo conduttore se ne affaccia un secondo nel modo che s'è detto, corrisponde ai periodi:

$$T_\mu \cdot \sqrt{\frac{L+M}{L}} \quad \text{e} \quad T_\mu \cdot \sqrt{\frac{L-M}{L}}$$ [1]).

§ 32. *Casi particolari.* — È facile adesso sottoporre al calcolo gli apparecchi rappresentati dalle figure 4 *a*, *b*, *c*, i quali rispondono alle ipotesi, che abbiamo ammesso per la dimostrazione del teorema del paragrafo precedente.

Il primo (fig. 4 *a*), che è formato con due conduttori del tipo di quello del paragrafo 5, darà un solo doublet corrispondente ai periodi:

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L+M)C}{2}}, \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L-M)C}{2}}. \end{cases}$$

Il secondo (fig. 4 *b*), nel quale stanno affacciati due apparecchi, simili a quello del paragrafo 6, emette due diversi doublets coi periodi:

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{(L+M)C} \\ T_2 = 2\pi \sqrt{(L-M)C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_3 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L+M)C}{3}}, \\ T_4 = 2\pi \sqrt{\dfrac{(L-M)C}{3}}. \end{cases}$$

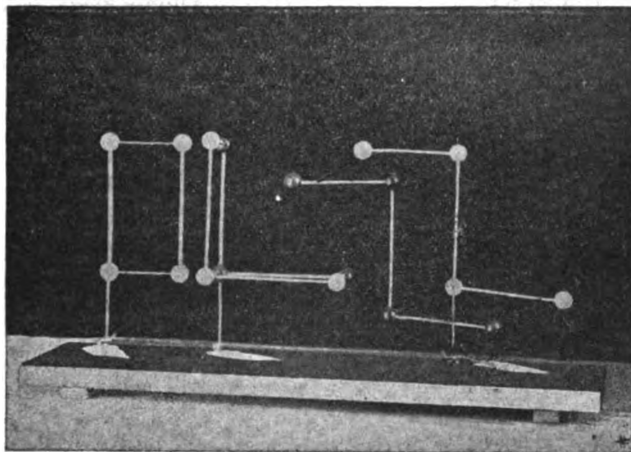
1) Teoremi analoghi si ottengono ancora tenendo conto delle azioni elettrostatiche. Se per esempio, come ai paragrafi 28, 29 e 30, si suppone che la prima capacità di un conduttore agisca su la prima dell'altro, la seconda su la seconda, ecc. l'$(m+1)$-esima su l'$(m+1)$-esima e tutti i coefficienti di potenziale abbiano il valore comune H, si trova che alla caratteristica:

$$\mathbf{M}(S, K) = 0$$

deve sostituirsi la:

$$\mathbf{M}(S+s, K+H) \cdot \mathbf{M}(S-s, K-H) = 0.$$

Il terzo finalmente (fig. 4 *c*), che risulta dalla riunione di due conduttori, uguali in tutto a quello da noi studiato nel



a *b* *c*

Fig. 4. — *a*) Sistema di due conduttori uguali ad una oscillazione; emette un doublet. *b*) Sistema di due conduttori uguali a due oscillazioni; emette due doublets. *c*) Sistema di due conduttori uguali a tre oscillazioni; emette tre doublets.

paragrafo 7, avrà uno spettro di tre doublets corrispondenti ai periodi:

$$\left\{\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{(L+M)\,C}{2-\sqrt{2}}}\,, \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{(L-M)\,C}{2-\sqrt{2}}}\,, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} T_3 &= 2\pi\sqrt{\frac{(L+M)\,C}{2}}\,, \\ T_4 &= 2\pi\sqrt{\frac{(L-M)\,C}{2}}\,, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} T_5 &= 2\pi\sqrt{\frac{(L+M)\,C}{2+\sqrt{2}}}\,, \\ T_6 &= 2\pi\sqrt{\frac{(L-M)\,C}{2+\sqrt{2}}}\,, \end{aligned}\right.$$

§ 33. *Sistema di tre conduttori qualunque.* — Il problema delle oscillazioni di un sistema costituito di tre conduttori differenti non presenta nessuna maggiore difficoltà di quello da noi trattato nel paragrafo 27. Anche le conclusioni a cui si arriva nei due casi sono simili.

Supponiamo, per fissare le idee, che il primo conduttore abbia m fili, il secondo r e il terzo s; siano le loro caratteristiche:

$$\mathbf{M} = 0\,,$$
$$\mathbf{R} = 0\,,$$
$$\mathbf{S} = 0\,,$$

L'equazione (5) del sistema complessivo si potrà scrivere simbolicamente:

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{M} & Q_{1,2} & Q_{1,3} \\ Q_{2,1} & \mathbf{R} & Q_{2,3} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & \mathbf{S} \end{vmatrix} = 0\,,$$

intendendo per le Q certe matrici formate di termini del tipo $D^2 M_{\mu,\nu}$, relativi alle azioni che s'esercitano fra fili appartenenti a conduttori diversi.

Se, per esempio, i fili del primo conduttore si distinguono coi numeri da *1* ad m, i fili del secondo coi numeri da $m+1$ a $m+r$, i fili dell'ultimo coi numeri da $m+r+1$ a $m+r+s$, sarà:

$$Q_{1,2} = \begin{vmatrix} D^2 M_{1,m+1} & \dots & D^2 M_{1,m+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D^2 M_{m,m+1} & \dots & D^2 M_{m,m+r} \end{vmatrix} \qquad Q_{1,3} = \begin{vmatrix} D^2 M_{1,m+r+1} & \dots & D^2 M_{1,m+r+s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D^2 M_{m,m+r+1} & \dots & D^2 M_{m,m+r+s} \end{vmatrix}$$

$$Q_{2,1} = \begin{vmatrix} D^2 M_{m+1,1} & \dots & D^2 M_{m+1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D^2 M_{m+r,1} & \dots & D^2 M_{m+r,m} \end{vmatrix} \qquad Q_{2,3} = \begin{vmatrix} D^2 M_{m+1,m+r+1} \dots & D^2 M_{m+1,m+r+s} \\ \cdot & \cdot \\ D^2 M_{m+r,m+r+1} \dots & D^2 M_{m+r,m+r+s} \end{vmatrix}$$

$$Q_{3,1} = \begin{vmatrix} D^2 M_{m+r+1,1} & \dots & D^2 M_{m+r+1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D^2 M_{m+r+s,1} & \dots & D^2 M_{m+r+s,m} \end{vmatrix} \qquad Q_{3,2} = \begin{vmatrix} D^2 M_{m+r+1,m+1} \dots & D^2 M_{m+r+1,m+r} \\ \cdot & \cdot \\ D^2 M_{m+r+s,m+1} \dots & D^2 M_{m+r+s,m+r} \end{vmatrix}$$

Dividiamo il determinante **B** in due matrici, una di $m+r$ e l'altra di s orizzontali, e sviluppiamolo secondo i minori estratti dalla prima.

Fra i minori ci si presenta anzitutto quello che fu chiamato **A** al paragrafo 27 e il suo complementare è **S**; sicchè una prima serie di termini dello sviluppo del determinante grande è riassunta nel prodotto **A S**.

In tutti gli altri minori, che si possono estrarre dalla matrice superiore, vi sarà almeno una verticale formata coi termini aggiunti della forma $D^2 M_{\mu,\nu}$; e la stessa cosa deve dirsi dei complementari di questi altri minori. Tutti i termini dello sviluppo del nostro determinante, che non sono già contenuti nel prodotto **A S** hanno dunque almeno due $M_{\mu,\nu}$ a fattore.

Se ora si rammenta l'espressione del determinante **A** si potrà scrivere senz'altro:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M\,R\,S} + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'}\,,$$

avendo le $G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}$ il solito significato.

Se le $M_{\mu,\nu}$ sono piccole rispetto ai coefficienti di autoinduzione, il secondo termine dell'espressione di **B** è piccolissimo rispetto al primo.

Ne viene dunque che: *se tre conduttori differenti si trovano in presenza (e non sono troppo vicini) lo spettro che essi emettono è poco diverso da quello, che si otterrebbe sopraponendo gli spettri relativi ai singoli conduttori isolati.*

§ 34. *Sistema di tre conduttori uguali: caso particolare.* — Quando i tre conduttori in presenza hanno la stessa forma e la stessa grandezza, ragionando come al paragrafo precedente, si può dimostrare che la caratteristica del sistema si svolge secondo una formola del tipo:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^3 + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'}\,.$$

E però: *se si affacciano tre conduttori uguali lo spettro che essi mandano si ottiene da quello, che ciascuno dei tre fornirebbe quando fosse isolato, sostituendo ad ogni riga una terna (triplet).*

La legge poi, con la quale si deduce il triplet dalla riga a cui corrisponde, non si può esprimere facilmente a parole, anche se il sistema considerato è molto semplice.

Per fare un esempio cerchiamo di vedere ciò che corrisponde allo schermo di risonatori studiato al paragrafo 26, nel caso particolare di $a = 3$.

L'equazione in y (la *) fornisce:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2y}{C} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{1,2} & -\frac{2y}{C} & M_{2,3} \\ M_{1,3} & M_{2,3} & -\frac{2y}{C} \end{vmatrix} =$$

$$= y^3 - \frac{1}{4}(M^2_{1,2} + M^2_{1,3} + M^2_{2,3}) C^2 y - \frac{1}{4} M_{1,2} M_{1,3} M_{2,3} C^3 = 0 .$$

Se si suppone ancora che, come nella figura 6 *a*, sia:

$$M_{1,2} = M_{2,3} = M ,$$
$$M_{1,3} = m ,$$

verrà:

$$y^3 - \frac{1}{4}(m^2 + 2M^2) C^2 y - \frac{1}{4} m M^2 C^3 =$$

$$= \left(y + \frac{mC}{2}\right)\left(y^2 - \frac{mC}{2} y - \frac{M^2C^2}{2}\right) = 0 .$$

Il sistema emette dunque un triplet coi periodi:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2} + y_1} ,$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2} + y_2} ,$$

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2} + y_3} ,$$

essendo:

$$y_1 = -\frac{mC}{2},$$

$$y_2 = \frac{C}{4}\left(m + \sqrt{m^2 + 8\,M^2}\right),$$

$$y_3 = \frac{C}{4}\left(m - \sqrt{m^2 + 8\,M^2}\right).$$

§ 35. *Ancora le oscillazioni di un sistema di conduttori.* — Il teorema, che abbiamo dimostrato nei paragrafi 27 e 33 per i sistemi composti di due e tre conduttori, si può estendere senz'altro ad un sistema di a conduttori.

Se le caratteristiche di questi sono date sotto la forma:

$$\mathbf{M}_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, a$$

la caratteristica del sistema complessivo potrà scriversi simbolicamente:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_1 & Q_{1,2} & Q_{1,3} & \ldots & Q_{1,a} \\ Q_{2,1} & \mathbf{M}_2 & Q_{2,3} & \ldots & Q_{2,a} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q_{a,1} & Q_{a,2} & Q_{a,3} & \ldots & \mathbf{M}_a \end{vmatrix} = 0.$$

Di nuovo le $Q_{\alpha,\beta}$ sono matrici di termini della forma $D^2 M_{\mu,\nu}$, relativi all'azione, che si esercita fra i fili dell'α-esimo e quelli del β-esimo conduttore. La $Q_{\alpha,\beta}$ ha α orizzontali e β verticali, non è dunque la stessa cosa che $Q_{\beta,\alpha}$.

Col procedimento di prima si dimostrerà che è:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}_1 \,.\, \mathbf{M}_2 \ldots \mathbf{M}_a + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu,\mu',\nu'},$$

ed anche, quando tutti i conduttori siano uguali:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}_\alpha^a + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'}.$$

Possiamo dunque concludere che *se a conduttori differenti si trovano in presenza (e non sono troppo vicini) lo spettro che essi emettono è poco diverso da quello, che si otterrebbe sopraponendo gli spettri relativi ai singoli conduttori isolati.*

E ancora: *se si affacciano a conduttori uguali lo spettro che essi mandano si ottiene da quello, che ciascuno fornirebbe quando fosse isolato, sostituendo ad ogni riga una banda composta di a righe* [1]).

§ 36. *Oscillazioni di un sistema di sistemi.* — Il problema delle oscillazioni di un sistema di sistemi non è analiticamente diverso da quello di un sistema di conduttori semplici; in realtà dipende da noi di pensare i singoli conduttori isolatamente o di pensarli invece riuniti in gruppi. Nella pratica però, e nel resultato dei calcoli, i due problemi sono diversi, perchè si dirà di avere un sistema di conduttori quando i coefficienti di induzione mutua, per ogni coppia di tali conduttori, hanno il medesimo ordine di grandezza, si dirà invece di avere un sistema di sistemi se i coefficienti relativi a certe coppie sono piccoli rispetto a quelli, che si calcolano per altre coppie.

La caratteristica del sistema di sistemi si costruisce al modo solito con le caratteristiche dei sistemi componenti. E quindi i teoremi dell' ultimo paragrafo valgono ancora quando alla parola *conduttore* si sostituisca la parola *sistema*.

§ 37. *Note bibliografiche al Capitolo quarto.* — Il caso di due conduttori differenti (ad una oscillazione) fu trattato con molti sviluppi dall' Oberbeck [2]).

Anche il primo fra i problemi del paragrafo 32, e il problema del paragrafo 34, si trovano già risolti in due memorie del principe Galitzin [3]).

Finalmente il caso del paragrafo ventesimosesto fu studiato dal v. Geitler [4]), il quale, sotto alcune condizioni restrittive,

1) Teoremi simili valgono al solito anche se le azioni fra capacità non sono più trascurabili.

2) A. Oberbeck. Wied. Ann., 55, 1895.

3) B. Galitzin. Wied. Ann., 56, 1895 e Bull. de l'Ac. Imp. de St.-Pétersbourg, (5), 3, 1895.

4) I. v. Geitler. Wied. Ann., 57, 1896. Il v. Geitler ritorna su l'argomento in un lavoro successivo (Wied. Ann., 66, 1898) dove insieme ad alcuni sviluppi analitici, è data una verifica sperimentale della teoria per il caso di $a = 2$.

stabilì il resultato esatto che un sistema di a circuiti ad una oscillazione emette uno spettro di a righe.

La teoria generale di un sistema di conduttori complessi, e quella di un sistema di sistemi, e gli altri sviluppi di questo capitolo mi appartengono [1]).

SULLA RADIOATTIVITÀ DEI METALLI USUALI.

Memoria del Prof. AUGUSTO RIGHI [2]).

1. La debole conducibilità elettrica posseduta dai gas è oggi generalmente considerata come dovuta a parziale ionizzazione dei loro atomi. Tale conducibilità varia in diverse circostanze; e, siccome le radiazioni emesse dai corpi radioattivi valgono a ionizzare i gas, così si è pensato che una delle cause della loro naturale conducibilità consista in una debolissima radioattività posseduta dai corpi che li circondano, e in particolare dalle pareti dei recipienti nei quali sono contenuti. Esperienze eseguite dal sig. Strutt [3]) e dai sig. Mac Lennañ e Burton [4]) sembrano confermare tale ipotesi, pur lasciando senza risposta il quesito, se quella radioattività appartenga realmente agli atomi dei corpi messi in esperienza, oppure a traccie in essi contenute di corpi fortemente radioattivi, come il radio, l' uranio, il torio ecc.

Non sembra possibile dirimere oggi questa questione, giacchè a produrre la debolissima radioattività attribuita ai metalli usuali basterebbero tracce di radio, di uranio, o di altro corpo radioattivo così infinitesime, da sfuggire forse ad ogni indagine: per cui sarà solo dopo uno studio completo del modo di comportarsi dei vari corpi, che si potranno forse raccogliere utili indizi in proposito. Per ora, ciò che più interessa, è il cercare di verificare, se effettivamente tutti i corpi siano ra-

1) A. Garbasso. Mem. R. Acc. di Torino, (2), 53, 1903.

2) Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, tomo 1°, serie 6.

3) Phil. Mag., June 1903, p. 680.

4) „ „ p. 699.

dioattivi, e cioè se si possa generalizzare quella, che poteva considerarsi come una proprietà appartenente in modo esclusivo a poche sostanze.

Il sig. Strutt fu condotto a supporre, che ogni corpo emetta raggi capaci di ionizzare i gas, ed analoghi a quelli emessi dai noti corpi radioattivi, specialmente dal fatto dimostrato dal Wilson [1]), e cioè che la ionizzazione spontanea dei diversi gas è proporzionale a quella assai più grande che essi presentano, allorchè sono esposti all' azione di corpi radioattivi. Egli adoperò per le sue esperienze un recipiente di vetro, in cui potevasi fare il vuoto o introdurre un qualunque gas, e in cui si trovava un conduttore isolato comunicante con un elettrometro a foglia d' oro posto in un secondo recipiente, in cui era stato fatto un buon vuoto. Le pareti interne del primo recipiente venivano coperte da un rivestimento costituito successivamente da vari corpi, in generale metalli. Misurando la diminuzione di carica dell' elettrometro in un tempo costante, che fu di un' ora, riconobbe che quella diminuzione, la quale può assumersi come misura della conducibilità del gas, variava a parità delle altre circostanze colla natura delle pareti del recipiente, essendo in unità arbitrarie di 2,3 a 3,3 per lo stagno in foglie; 1,3 per il vetro spalmato di acido fosforico; 1,6 per l' argento depositato sul vetro; 1,2 per lo zinco; 2,2 per il piombo; 2,3 per il rame pulito; 1,7 per il rame ossidato; 2 a 3,9 per il platino; 1,4 per l' alluminio.

Il punto di partenza fu per i sig. Mac Lennan e Burton un po' differente. Essi pensarono che la conducibilità lentamente crescente di un gas racchiuso in un recipiente, dimostrata dal sig. Geitel [2]), e quella maggiore dell' ordinario posseduta dall' aria in luoghi chiusi trovata dai sig. Elster e Geitel [3]), fosse dovuta ad una emanazione radioattiva emessa dai corpi, e simile a quella esistente sempre nell' atmosfera, e che rende radioattivo un conduttore elettrizzato negativamente e lasciato esposto per un certo tempo all' aria libera.

1) Proc. Roy. Soc., t. 69, p. 277.
2) Phys. Zeitschr., t. 2ª, p. 116, 1900.
3) Phys. Zeitschr., t. 2ª, p. 560, 1901.

I detti fisici sperimentarono con un grande recipiente di zinco isolato e caricato a circa 165 volta, entro il quale si trovava un' asta metallica comunicante con un elettrometro a quadranti, misurando ripetutamente il potenziale da quello acquistato in un dato intervallo di tempo, dopo esser stato messo per un momento in comunicazione col suolo. Essi riconobbero così, che l'aria diminuiva di conducibilità per un certo tempo (circa quattro ore), e poi acquistava una conducibilità gradatamente crescente. Il valore iniziale era variabile da un giorno all'altro, mentre era costante il valore limite finale, che divenne peraltro un poco maggiore, quando si rivestirono di foglie di stagno le pareti interne del recipiente, e più grande ancora quando allo stagno si sostituì il piombo. La prima fase venne spiegata col dissiparsi dell' emanazione naturalmente contenuta nell' aria; la fase di aumento invece si attribuì all' emissione graduale di una emanazione radioattiva dai metalli sopra nominati.

Nel corso di queste esperienze i signori Mc. Lennan e Burton ottennero pure un risultato importante, e cioè che, circondando l' apparato con un grosso strato di acqua, la conducibilità dell'aria diveniva minore: ciò che li indusse a credere, che in parte la conducibilità del gas fosse dovuta a radiazioni provenienti dall' esterno, dotate di grandissimo potere penetrante ed esistenti continuamente intorno a noi. La provenienza di tali ipotetiche radiazioni è ignota; ma verosimilmente esse sono emesse dai corpi costituenti la terra e dall' atmosfera.

Il sig. Lester Cooke [1]) giunse in modo simile alla medesima conclusione.

Come si vede, lo studio della radioattività dei corpi in genere può dirsi appena iniziato; cosicchè nuove ricerche su tal soggetto non possono riuscire che opportune.

Da quelle, di cui ora si è reso conto, non si comprende bene se la conducibilità prodotta nell' aria dai corpi in essa immersi sia dovuta soltanto ad una emanazione, che spiega lentamente il proprio effetto, oppure anche a radiazioni del

1) Phil. Mag., October 1903, p. 403.

genere di quelle chiamate α, β, o γ emesse dal radio e dagli altri corpi fortemente radioattivi. Un mezzo atto a far riconoscere l' esistenza di queste radiazioni consisterebbe nel ripetere le descritte esperienze abbreviando per quanto è possibile l' intervallo di tempo, che trascorre dall' istante in cui l'apparecchio viene chiuso, a quello in cui la misura è compiuta.

Le esperienze, istituite a tale intento, e delle quali si renderà conto in questo scritto, non riusciranno dunque superflue, tanto più che passo a passo ebbi occasione di riscontrare diverse cause di errore, che solo dopo alcuni mesi di lavoro ho potuto in buona parte eliminare mercè speciali disposizioni, che saranno più oltre descritte. Per quanto incompleti, i risultati ottenuti mi sembrano dimostrare la reale emissione di raggi da diversi dei metalli usuali, senza tuttavia che si possa finora stabilire quale sia la loro natura, cioè se raggi α, β oppure γ.

2. Se un conduttore isolato e carico si trova in un recipiente metallico comunicante col suolo e pieno di gas, la quantità di elettricità perduta dal conduttore nell' unità di tempo, ossia l' intensità della corrente attraverso il gas, è indipendente dal valore del potenziale, se questo ha un valore abbastanza elevato. Questa corrente di *saturazione* libera il gas dai ioni, mano a mano che in essi si formano. La diminuzione di potenziale nell' unità di tempo sarà allora tanto maggiore quanto più piccola è la capacità del conduttore. Se dunque si vuole, che le letture fatte all' elettrometro riescano relativamente considerevoli, anche se corrispondono ad intervalli di tempo non molto grandi, occorre ridurre al minimo la capacità elettrica dell' istrumento. Questo è il motivo per il quale nelle esperienze del genere di quelle di cui qui si tratta, un elettrometro a foglie d' oro, costituente lo stesso conduttore che si scarica, è preferibile ad un elettrometro a quadranti. Volendo dunque abbreviare la durata delle esperienze ho cercato di costruire un elettrometro di dimensioni piccolissime, ciò che non offre altre difficoltà che quelle, veramente non piccole, di ordine pratico, relativamente al taglio e all' appli-

cazione di striscie estremamente piccole di foglia d'oro della più sottile.

Descriverò senz'altro la disposizione finale dell'apparecchio da me adoperato, non indicando quelle antecedenti, che, man mano che ne scoprivo i difetti, dovetti modificare; questi tuttavia indirettamente saranno resi noti nel dar ragione dei dettagli dell'apparecchio, e nel descrivere le cure necessarie per ottenere buone misure.

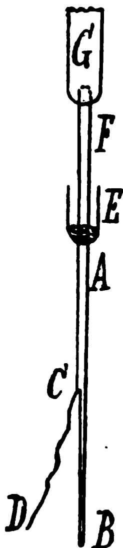


Fig. 1.

La parte principale è naturalmente l'elettrometro, che è in pari tempo il conduttore elettrizzato che si scarica. Consta di un'asticella metallica A B (v. fig.1) cui è attaccata una stretta fogliolina d'oro C D, e che termina superiormente con una campanellina E, nel fondo della quale è fissato con guttapercha un bastoncino isolante di zolfo o di quarzo fuso F attaccato ad un sostegno metallico G. Questo modo di attacco del conduttore ha lo scopo di attenuare la perdita di carica lungo la superficie dell'isolatore.

Ed infatti non si ha sensibile differenza nella velocità, con cui diminuisce il potenziale del conduttore, se il sostegno G è isolato o comunicante col suolo. L'asticella AB è lunga circa 4 c. e larga poco più d'un millimetro, e viene caricata con un conduttore mobile, come si dirà fra poco.

Il recipiente, in cui trovasi il descritto elettrometro, è un comune vaso di vetro a disseccazione capovolto ABCD (fig. 2), la cui bocca è chiusa da una lastra di vetro smerigliato AB spalmata di grasso per la buona tenuta, trattenuta a posto da un sostegno mobile S. Il breve collo del recipiente passa per un'apertura circolare praticata nella lastra metallica M N, la quale sostiene tutto l'apparecchio, il cui interno è difeso contro le eventuali influenze elettriche da un rivestimento di tela d'ottone, rappresentato nella fig. 2 con linee tratteggiate. In esso furono praticati dei fori in corrispondenza a cinque aper-

ture circolari esistenti nelle pareti del recipiente. Una H sul davanti, ed un' altra posta di fronte a questa, chiuse con vetri

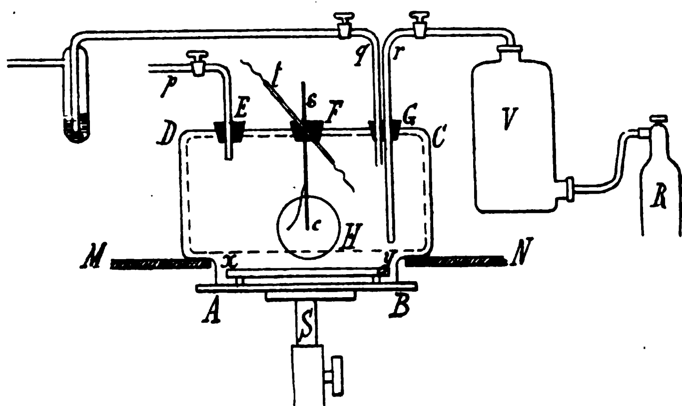


Fig. 2.

piani, permettono di osservare la foglia d' oro del conduttore elettrizzato *c*; le altre tre E, F, G, praticate sul fondo del recipiente, sono chiuse da tappi, pei quali passano i tubi di vetro muniti di rubinetto *p, q, r*, il sostegno *s* del conduttore o elettrometro *c*, ed il tubetto di vetro *t*, contenente un filo metallico per la carica del conduttore. Questo filo comunica col polo isolato d' una batteria di piccoli accumulatori, e la sua estremità interna vien portata a contatto del conduttore, quando lo si vuol caricare, mediante una rotazione del tubetto *t* intorno al proprio asse.

I metalli, di cui vuol studiarsi la supposta radioattività, hanno la forma di dischi, aventi circa 11 c. di diametro, ed uno di tali dischi è collocato in xy sopra un anello metallico, posto sul vetro AB e comunicante col suolo.

Non appena chiuso l' apparecchio lo si riempie d'anidride carbonica aprendo i rubinetti dei tubi *q* ed *r*, il secondo dei quali comunica con un gran recipiente V, e per via di questo con una bomba R di anidride carbonica liquida, di cui si apre altresì il rubinetto di chiusura. Il foro, pel quale l' anidride carbonica esce dal serbatoio R, deve essere esilissimo, affinchè la corrente gassosa non sia troppo veemente.

Si giudica della velocità di questa corrente dal gorgogliamento, che essa produce nell' acido solforico messo a questo scopo in un recipiente W, dal quale gas si versa poi nell' atmosfera.

È dunqne nell' anidride carbonica che si produce la ionizzazione e non nell' aria, ciò che assicura la regolarità dei risultati. Coll' aria infatti si hanno a parità di condizioni effetti variabili da una esperienza all' altra, mentre l'anidride, presa sempre dallo stesso serbatoio, mostra possedere nelle successive esperienze sempre la stessa conducibilità spontanea.

È di somma importanza per la regolarità dei risultati, che la corrente gassosa sia abbastanza lenta, perchè la fogliolina d' oro non venga ad agitarsi. Ho riconosciuto infatti, che l'elettrometro a foglia d' oro ha in sè una grave causa d' errore, alla quale non si può sperare di porre riparo, che evitando alla fogliolina ogni brusco movimento, che possa in qualche modo deformarla. Senza una tale precauzione accade facilmente che in esperienze successive una stessa deviazione, valutata in base al posto occupato dall' estremità della foglia, corrisponda a cariche differenti della foglia stessa.

Per la medesima ragione, allorchè si vuol aprire l' apparecchio per cambiare il disco, occorre prima sostituire nuovamente con aria l' anidride carbonica, ciò che si ottiene facendo giungere pel tubo *p*, il cui rubinetto sarà ora aperto, una lenta corrente d' aria, che trascina il gas pel tubo *q*. Senza questa precauzione si avrebbero dei bruschi movimenti della fogliolina nell' atto di togliere di posto il vetro AB.

La fig. 3 mostra in pianta la maniera, nella quale si osserva la posizione della foglia d' oro.

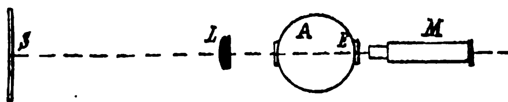


Fig. 3.

A è il recipiente, E l' elettrometro S una scala a millimetri orizzontale fortemente illuminata posta a circa 3 metri (3^m,23) di distanza dall' elettrometro, L una lente convergente

acromatica di circa 17 c. di distanza focale, che forma in E un' immagine reale della scala, M un microscopio (tolto dalla macchina da dividere), con cui si osserva in pari tempo la foglia d' oro e l' imagine della scala. Si vede infatti nel campo di questo strumento un' imagine della scala (fig. 4) e su questa l' imagine capovolta F dell' estremità della foglia d' oro.

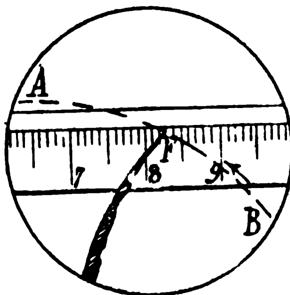


Fig. 4.

Questa estremità percorre, quando la deviazione lentamente diminuisce, un arco AB nel senso della freccia, e questo arco taglia un certo numero di divisioni della scala.

Nel mio apparecchio uno spostamento della foglia, che abbia in proiezione orizzontale la lunghezza d' un millimetro, dà luogo ad uno spostamento di 17,2 divisioni della scala sull' imagine; e siccome si valutano facilmente ad occhio i decimi di divisione, così si vengono a rilevare degli spostamenti di $\frac{1}{172}$ di millimetro.

Occorre naturalmente sapere a qual valore del potenziale dell' elettrometro corrisponda una data posizione della fogliolina rispetto alla scala. A questo scopo per ogni nuovo disco messo nell' apparecchio si leggono le indicazioni d' un elettrometro idiostatico, messo in comunicazione colla foglia d' oro. Tale elettrometro comunica permanentemente col filo caricatore *t*, e quindi col polo isolato della batteria di piccoli accumulatori che forniscono la carica. Basta quindi lasciare il filo *t* in comunicazione colla foglia d' oro e leggere tanto la posizione di questa sulla scala, che la deviazione dell' elettrometro.

Questo confronto viene fatto per due o tre posizioni della foglia d'oro, cioè per due o tre valori diversi del potenziale, che si ottengono variando il numero di elementi della batteria. Per le posizioni intermedie della foglia d'oro si calcolano i corrispondenti potenziali per interpolazione. L'elettrometro idiostatico, la cui sensibilità si può variare entro limiti lontanissimi, è quello che fu altra volta da me descritto [1].

A rigore, quando nelle esperienze definitive il filo di carica *t* viene allontanato dal conduttore portante la foglia d'oro, avviene una piccola variazione nella distribuzione dell'elettricità nel conduttore stesso, cosicchè ad una data posizione della foglia non corrisponde più esattamente quel potenziale, che venne indicato dall'elettrometro idiostatico. Ma evidentemente il valore attribuito al potenziale del conduttore è proporzionale al valore reale di questo, e l'errore, del resto piccolissimo, che così si commette, non muta i rapporti numerici fra i risultati delle misure.

In generale il potenziale dato al conduttore fu di 150 a 170 volta, valore più che sufficiente, perchè la perdita di carica in un dato tempo riescisse indipendente dal potenziale stesso.

3. Messo a posto un disco metallico entro il recipiente e riempito questo di anidride carbonica, si cominciava col fare il già descritto confronto fra le indicazioni della foglia d'oro e quelle dell'elettrometro, necessarie per esprimere in volta i potenziali della foglia d'oro. Dopo ciò bisognava assicurarsi, che fossero cessati nella foglia d'oro certi piccoli movimenti irregolari, probabilmente dovuti alla differenza di temperatura fra l'anidride carbonica e le pareti del recipiente, che il grande serbatoio V serve ad attenuare. Infine si caricava il conduttore portante la foglia d'oro, e si osservava la diminuzione di potenziale in un dato tempo. Questo fu da 10 a 30 minuti primi, ma si registrò sempre la diminuzione riferita ad un'ora di tempo. Dopo una prima misura se ne fanno altre, se occorrono, nella stessa maniera.

1) V. Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie 5., t. 4., pag. 99, 1894 ; Il N. Cimento, serie 3., t. 36, pag. 253.

Onde non essere costretto a sorvegliare continuamente l'orologio, e poter quindi occupare in altri lavori i periodi di attesa, trovai comodo di servirmi di un contatto elettrico applicato al quadrante d'un orologio, che faceva agire una soneria elettrica all'istante in cui dovevo recarmi all'apparecchio per fare una misura.

4. I metalli esaminati furono i seguenti:

Alluminio dato per puro in commercio, in lastra.

Antimonio puro, provveduto dalla casa Merck di Darmstadt, e ridotto a disco per fusione.

Argento senza lega in lastra.

Bismuto puro, provveduto presso la casa suddetta e fuso in forma di disco.

Cadmio puro, della stessa provenienza e fuso.

Ferro del commercio, in lastra.

Nichel puro del commercio, in lastra.

Piombo comune, foggiato a disco per fusione.

Rame comune in lastra.

Stagno puro della casa suddetta, ridotto a disco per fusione.

Zinco puro della stessa provenienza e fuso esso pure.

Un momento prima di mettere il disco al posto, esso venne sempre pulito con carta vetrata.

Di tanto in tanto si fecero misure mettendo al posto del disco metallico un disco di vetro accuratamente pulito.

Per quanto si sia cercato, come si è visto, di eliminare ogni causa di errore, i risultati ottenuti ripetende le misure con un medesimo disco differirono fra loro in qualche caso più che non differiscano fra loro le medie finali corrispondenti ai diversi metalli.

A queste medie non si può dunque attribuire un significato rigoroso; tuttavia, se può rimanere qualche incertezza intorno alla grandezza relativa degli effetti dati dai vari metalli, non si può mettere in dubbio per la maggior parte di essi, l'azione ionizzatrice da essi prodotta. Ecco le medie, cioè la diminuzione di potenziale in volta per ogni ora di tempo:

Alluminio . .	23
Antimonio . .	24,8
Argento . . .	23
Bismuto . . .	29,8
Cadmio . . .	24,5
Ferro . . .	22,9
Nichel . . .	22,9
Piombo . . .	32,5
Rame	23,1
Stagno . . .	24,4
Zinco	24,3
Vetro	22,4

L'effetto è particolarmente marcato nel caso del bismuto e in quello del piombo. Quest' ultimo presenta una particolarità interessante, che la seguente serie di misure, scelta fra tante serve a mostrare

Piombo, dopo un quarto d'ora da che fu chiuso nell'anidride carbonica	38
Dopo altra mezz' ora	33
Dopo altre due ore	24

Come si vede l'effetto del piombo, dapprima assai notevole, si affievolisce a poco a poco, e non si ottiene nuovamente l'effetto massimo, che ripulendo il metallo con carta vetrata. Sembra dunque che nell' anidride (la quale non venne disseccata prima d'ammetterla nel recipiente) il piombo si copra d'un velo, che assorbe in parte i supposti raggi emessi dal metallo. Qualche altro metallo, per esempio lo zinco, mi sembrò presentare in minimo grado un analogo fenomeno.

In nessun caso potei constatare un sicuro aumento graduale della ionizzazione coll' andare del tempo, ciò che sembra indicare, che i metalli adoperati agiscono piuttosto emettendo radiazioni, che producendo emanazioni.

Tuttavia l'interpretazione di questi pochi risultati non è nè così semplice, nè tanto facile quanto può sembrare.

Ammessa infatti l'esistenza di una radiazione ionizzatrice e di grandissima penetrazione proveniente dalla terra o dall' atmosfera, il mettere nell' apparecchio un disco metallico

modifica lo stato delle cose in più maniere. Prima di tutto il disco può essere radioattivo per conto proprio, e colle sue radiazioni o per l'emissione d'una emanazione, può ionizzare il gas. In secondo luogo il disco potrà indebolire per assorbimento quella parte della suddetta radiazione penetrantissima che è diretta attraverso di esso, e così colla sua presenza il metallo tende a scemare la ionizzazione.

Infine la radiazione penetrantissima, che colpisce il disco, può eccitare in esso l'emissione di raggi secondari.

Per questi motivi mi sembra prematuro il trarre dalle esperienze descritte altra conclusione all'infuori della seguente e cioè che i varii metalli fanno variare colla loro presenza la ionizzazione del gas che li circonda.

Per quanto poco fruttuose, queste ricerche hanno servito a metterne in rilievo le principali difficoltà, fra le quali alcune che non erano state prima da altri rilevate, e a mettere in guardia chi volesse continuarle. In nuove ricerche sarebbe sopra tutto giovevole il poter fare a meno dell'elettroscopio a foglia d'oro, sostituendovi qualche più esatto indicatore di potenziale, che però dovrebbe avere, come quello, una capacità elettrica estremamente piccola. Ho già in costruzione un apparecchio di questo genere, che può considerarsi come una minuscola bilancia di Coulomb. Questo apparecchio, quand'anche non corrisponda alla speranza in esso riposta, riescirà certamente sensibilissimo, e perciò eminentemente adatto alla dimostrazione col metodo elettrico delle proprietà possedute dai raggi emessi dai corpi radioattivi.

SULLA DISPERSIONE ELETTRICA NELLE SORGENTI TERMALI DI ACQUASANTA.

Nota del Dott. C. CARPINI [1]).

In quel di Acquasanta (Ascoli Piceno), poco lungi dall'antica Salaria, esiste sulla riva destra del Tronto una abbondantissima sorgente minerale (altitudine m. 394 dal mare) di antica celebrità; poichè in Italia ed all'estero si sono studiate le

1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, Ser. 5., Vol. 13, Fasc. 10, 1904.

acque minerali ed i fanghi, che spesso le accompagnano, dal punto di vista della loro radioattività, così mi è parso interessante studiare dal medesimo punto di vista tali sorgenti importantissime.

Il terreno di Acquasanta appartiene al terziario; la parte superiore è costituita da arenaria ora dura, ora facilmente sgretolabile, probabilmente del miocene medio, parte superiore; inferiormente scisti argillosi contenenti banchi di calcare diverso con piccole nummoliti. Il paese poi giace sul travertino; al di sotto trovasi la scaglia grigia e rossa del senoniano, al contatto della quale con gli scisti argillosi suddetti sgorgano le dette acque.

Escono all' aperto mediante una serie di ampie grotte; la prima è molto grande (m^3 400), ed è ricoperta da splendide incrostazioni calcaree e solfuree: il fondo è ricoperto dal torrente di acqua per oltre un metro di altezza, risalendo il quale si entra nella seconda grotta, meno ampia, a cui fan capo due grotte laterali: attraverso ad uno stretto pertugio si penetra nell' ultima grotta, chiamata Grande Cratere dal senatore Orsini che la scoperse: essa è lunga m. 104, ed il fondo è ripieno di una grande quantità di fanghi e di acqua; la eccessiva quantità di anidride carbonica, di idrogeno solforato, ed il grado eccessivo di calore (35°,1 all' aria), non vi permettono che una breve sosta.

Cotali acque sono limpide ed incolore: dall' analisi compiuta dai Professori Carlinfanti e Trottarelli sappiamo che i mineralizzatori sono: l' ammonio, il calcio, il magnesio, il ferro, il sodio, il potassio e l' alluminio, con tracce di bario, stronzio, litio, cesio e rubidio: inoltre su cm^3 1000 di acqua a 0° e a 760 mm. di pressione si contengono: acido solfidrico cm^3 11,59, anidride carbonica cm^3 113,01, azoto cm^3 9,98. La temperatura dell' acqua è variabile alquanto nei diversi mesi dell' anno; più calda alla fine di settembre: ho osservato che nei primi di Agosto da 34°,4 segnati dal termometro all' ingresso della prima grotta si arrivò a 36°,2 alla metà del grande cratere. L' ambiente risulta così saturo di umidità: ma l' impossibilità di trasportare apparecchi non mi ha permesso di

misurare l'umidità che all'ingresso della prima grotta, ove la relativa si aggira intorno ad 80.

I fanghi poi sono a base di argilla, di color cenere oscuro e contengono, secondo l'analisi del Carlinfanti e Trottarelli, gli stessi principî mineralizzatori delle acque: presi di recente sono untuosi e costituiti da una poltiglia finissima, impalpabile: lasciati asciugare perdono alquanto il loro colore oscuro, la untuosità e si riducono in granuli più o meno grossi.

È stato riconosciuto che, meno poche eccezioni, l'aria delle grotte ed in generale di ambienti chiusi ove l'aria ristagna, è più disperdente che non l'aria libera esterna continuamente rinnovata dalle correnti aeree. La presenza di tali fanghi e di tali acque nelle grotte suddette, nonchè la loro speciale atmosfera e la loro grande temperatura, mi hanno condotto a vedere che cosa succede della dispersione elettrica in un ambiente così speciale. Ho eseguito perciò una serie di misure di dispersione poco più oltre l'ingresso della prima grotta, ove non esistono i fanghi, e per avere un termine di confronto, anche all'aria libera esterna in un punto un po' più elevato, sopra un'altura che scendeva a picco sul letto del Tronto. Le prime misure furono eseguite dalle 6 alle 7 pomeridiane, le altre invece dalle 9 alle 10 antimeridiane: certo era desiderabile compiere le due misure nello stesso tempo, ma non disponendo di due apparecchi, le eseguii in due ore in cui la dispersione elettrica è pressochè eguale, come si può ad es. vedere dalle tabelle del Gockel [1]) per la dispersione durante il giorno. Mi sono servito dell'elettrometro di Elster e Geitel della fabbrica Günther e Tegetmayer, favoritomi dal Prof. O. Murani, che ringrazio sentitamente: determinai la dispersione per le due cariche, accompagnando tali misure da misure di umidità assoluta e relativa, di pressione tanto al mattino che alla sera e dalle indicazioni dello stato del cielo. Solo l'umidità della grotta la determinai tre volte, perchè l'acido solfidrico mi attaccava prontamente l'argentatura dell'igrometro di Chistoni. Nella seguente tabella riporto tali risultati.

1) Phys. Z. S. 372, 1903.

	All' aria libera							Nelle grotte			
Data	Umidità assoluta	Umidità relativa	Pressione	Stato del cielo	$+a$	$-a$		Umidità relativa	$+a$	$-a$	q
Agosto 2	9,9	44,6	731,4 / 728,3	Sereno . . .	3,37	3,49	1,038	83,2	2,08	1,57	0,750
3	11,2	47,4	730,5 / 732,8	Nuvolo in parte	2,98	3,34	1,120	—	2,22	2,87	1,300
4	12,7	65,5	733,7 / 731,8	Sereno . . .	2,18	2,46	1,118	—	0,91	0,89	0,983
5	6,2	39,5	732,7 / 730,8	» . . .	3,26	3,42	1,022	—	1,69	0,80	0,468
6	8,4	40,2	732,7 / —	» . . .	2,52	2,85	1,138	85,3	1,03	1,10	1,068
7	8,4	36,5	733,1 / 730,7	» . . .	3,42	3,49	1,026	—	0,91	1,24	1,380
8	8,8	33,2	731,6 / 731,2	» . . .	2,18	2,39	1,098	—	1,45	1,78	1,227
9	5,4	20,3	726,1 / 725,0	» . . .	3,64	3,34	0,920	—	1,34	1,39	1,037
10	5,3	19,0	725,2 / 722,8	» . . .	3,84	3,48	0,898	—	1,41	1,17	0,835
11	12,9	54,5	725,9 / 725,2	Nuvolo in parte	3,13	3,75	1,198	78,9	1,89	1,68	0,856
12	7,4	25,1	730,2 / 732,0	Sereno . . .	3,47	3,63	1,046	—	1,37	1,34	0,978

Risulta dalla precedente tabella che la dispersione dell'aria delle grotte è molto inferiore a quella dell'aria libera esterna: mentre per questa esiste una unipolarità negativa, nell'interno si trova una grande variabilità di q, che forse ha bisogno di conferma, se cioè non sia dovuto a qualche causa inerente al modo di sperimentare. Ad ogni modo il piccolo valore dei due coefficienti di dispersione dimostra come l'aria di quelle grotte sia molto meno ionizzata dell'aria libera esterna. Tale risultato, come ho osservato, non è nuovo; l'Elster e Geitel [1]) l'avevano già osservato in qualche grotta, e recentemente il Gockel [2]) lo riscontrò in una grotta scavata nella molassa.

Dopo tale risultato sembrava probabile che i fanghi depositati dalle acque fossero poco o punto radioattivi. Presi entrambi nell'ingresso del grande cratere, e conservati in recipienti chiusi, li studiai con maggior cura in mia casa, ricorrendo al solito metodo d'un condensatore, di cui l'armatura carica comunicava con l'elettrometro, e l'altra recante la sostanza era a terra.

Da ripetute esperienze non ho potuto costatare una radioattività apprezzabile, essendo i risultati restati sempre nel limite degli errori di osservazione possibili.

Questo risultato dimostra che le proprietà terapeutiche dei fanghi e delle acque non dipendono dal loro grado di radioattività, come avrebbero pensato l'Elster e Geitel [3]) dopo lo studio di alcuni fanghi, come ad es. quelli di Battaglia.

---

1) Phys. Z. S. 4-522, 1903.
2) Phys. Z. S. 604, 1903.
3) Vedi Müller. Phys. Z. S. 357, 1904.

LIBRI NUOVI

LEHRBUCH DER PHYSIK.

O. D. CHWOLSON.

II Band. Lehre der Schall. Lehre von den Stralenden Energie übersertz. von H. Pflaum. (Trattato di Fisica II vol. Suono ed energia raggiante).

Del primo volume di questo trattato è già stata fatta una recensione nel *Nuovo Cimento.* Il secondo volume, di cui adesso è comparsa la traduzione tedesca fatta sulla seconda edizione russa, è diviso in due parti, la prima delle quali è formata dall' acustica e la seconda insieme con l' ottica tratta la produzione e la propagazione di tutte le radiazioni di natura vibratoria: radiazioni dell' infrarosso, dell' ultravioletto ed onde elettromagnetiche. Stabilito il concetto che tra queste varie specie di radiazioni non ci sia altra differenza che quella riguardante la diversità delle corrispondenti lunghezze d' onde, l'A. sviluppa sia la teoria elettromagnetica, che la teoria meccanica della luce, mettendole in diretto raffronto con i vari fenomeni luminosi; questi d' altra parte sono sempre descritti diffusamente indipendentemente dalle varie teorie e sono espressi con leggi verificabili direttamente con le esperienze. La ricca e moderna scelta di queste ultime e la netta-esposizione e discussione dei risultati che si riferiscono ai vari argomenti danno al trattato una grandissima importanza. Per comodità dello studioso ogni capitolo è chiuso da utilissime indicazioni bibliografiche di memorie originali relative all' argomento trattato nel capitolo.

L' edizioni e le incisioni sono nitidissime.

RIVISTA

Bulletin des Ingenieurs Electriciens. Liège.

T. IV, 3ª Serie, 1904.

Flam A. *Sulle macchine polifasi a collettore* (pp. 65-90). — I motori a corrente alternata muniti di collettore e di spazzole, formano una classe separata e offrono delle particolarità che ne fanno un soggetto interessante di studio. Questi motori di conduzione e d'induzione sono caratterizzati, i primi da pezzi polari attaccati alla parte fissa induttrice e senza campo rotante; i secondi da uno *stator* che riceve la corrente principale e da un intraferro di spessore uniforme. Le due categorie sono essenzialmente asincrone.

L'A. si propone di esporre in questa memoria i principi delle macchine polifasi dei tipi Görges, Latour e Heyland. In questa prima parte tratta e discute i principi sui quali è basata la costruzione dei motori d'induzione con collettore, dà poi un cenno sopra il motore costruito nel 1891 da Görges e che fu ripreso più tardi da Latour, il quale aggiunse fra le lamine delle resistenze non induttive, ed infine ne deduce le sue qualità caratteristiche.

Villame A. *Le equazioni fondamentali delle correnti variabili nei circuiti derivati* (pp. 91-113). — Considerando un circuito semplice percorso da una corrente di f. e. m. costante o variabile e nel quale siano inserite delle capacità ed autoinduzioni, è noto che l'intensità della corrente è legata alla f. e. m. dall'equazione differenziale di secondo ordine, lineare a coefficienti costanti:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{i}{c} = \frac{de}{dt}.$$

Nel caso di più circuiti derivati, che posseggano capacità ed autoinduzioni o sole capacità od autoinduzioni, percorsi da più f. e. m. si ha allora un sistema di equazioni simultanee ottenute scrivendo le leggi del Kirchoff tante volte quanto è necessario.

La prima legge dà un sistema di p equazioni di primo grado del tipo $\Sigma i = 0$ che permette di determinare p intensità in funzione delle $n - p = q$ intensità rimanenti, per determinare le

quali è necessario applicare la seconda legge del Kirchoff che fornisce appunto q equazioni differenziali del tipo:

$$(1)\qquad \Sigma\left(L\frac{di}{dt}+ri+\frac{\int i\,dt}{c}\right)=\Sigma' e$$

dove si è tenuto conto delle f. e. m. dovute all'autoinduzione e delle differenze di potenziale dovute alle resistenze ohmiche e alle capacità.

Derivando la (1) si ottengono altre q equazioni del tipo:

$$(2)\qquad \Sigma\left(L\frac{d^2 i}{dt^2}+r\frac{di}{dt}+\frac{i}{c}\right)=\Sigma'\frac{de}{dt}.$$

I sistemi (1) e (2) permettono di ottenere l'equazione fondamentale del problema sotto la forma:

$$M_r\frac{d^r i_m}{dt^r}+M_{r-1}\frac{d^{r-1} i_m}{dt^{r-1}}+\ldots+M_0 i_m=\Phi\left(e_1, e_2 \ldots \frac{de_1}{dt}, \ldots\ldots \frac{d^2 e_1}{dt^2}\right)$$

dove il suo integrale generale farà conoscere non soltanto la i_m, ma anche, senza nuove integrazioni, le altre intensità servendosi delle equazioni che hanno servito ad eliminarle.

Però se si ha sempre la possibilità di arrivare a questa equazione generale i calcoli sono assai lunghi e laboriosi, perciò l'A. risolve questo problema in alcuni casi particolari, fra i quali quello dei circuiti derivati alimentati da un generatore di resistenza e autoinduzione note, quello di una f. e. m. armonica, quello di due condensatori in derivazione e applica i risultati ottenuti alla capacità uniformemente ripartita.

CHAUVIN H. *Applicazioni del metodo della perdita di carica alla misura delle grandi resistenze variabili con la tensione elettrica* (pp. 114-117). — Il metodo della perdita di carica consiste nello scaricare un condensatore di capacità nota attraverso la resistenza da misurarsi, durante un certo tempo.

Ma, come spesso accade, se la resistenza del corpo da studiarsi varia con la tensione elettrica alla quale è sottoposto, allora la nota formola: $R=\dfrac{t}{C\log\dfrac{V_0}{V}}$ non è più da applicarsi. L'A. propone in questo caso un metodo grafico che permette di determinare rigorosamente la resistenza che corrisponde a una data tensione.

VILLAME A. *Le equazioni fondamentali delle correnti variabili nei circuiti derivati* (pp. 122-138). — In questa seconda parte

della memoria l'A. continua a trattare alcuni casi speciali e ne discute i risultati.

HAM A. *Sulle macchine polifasi a collettore* (pp. 139-156). — Questa nota non è altro che la continuazione del precedente studio dell'A. intorno al medesimo argomento. Mostra che i risultati pratici delle macchine tipo Heyland e Latour concordano con la teoria e ne costruisce i diagrammi.

HAM A. *Sopra una costruzione grafica per determinare il reostato d' avviamento dei motori asincroni* (pp. 157-161). — L'A. valendosi dei resultati esposti nella nota precedente indica una costruzione grafica per determinare il reostato d' avviamento dei motori asincroni.

SARRAT V. *Condizioni generali di utilizzazione di una batteria-tampone munita di un elevatore automatico* (pp. 180-219). — Molti autori da qualche tempo hanno rivolti i loro studi su questo soggetto che, sebbene molto interessanti, non hanno però completamente risolta tale questione.

L'A. in questa nota analizza le condizioni di funzionamento dei diversi elevatori suscettibili di essere aggiunti ad una batteria-tampone per la regolarizzazione delle cariche di una stazione generatrice di corrente continua, ricorrendo all' impiego delle caratteristiche che presentano il notevole vantaggio di mostrare all' evidenza la maggior parte dei risultati.

CHAUVIN H. *Determinazione della tangente alla curva di magnetismo di una macchina* (pp. 239-254). — L'A. si propone in questa memoria di ricercare un' espressione dell' inclinazione della tangente alla curva del magnetismo di una macchina, in funzione di quantità facili a determinarsi, quando sia nota la curva della permeabilità relativa ai materiali impiegati.

BUFFE M. *Pile ed accumulatori ad acidi grassi* (pp. 255-262). — I fenomeni elettrolitici negli acidi grassi sono stati fino ad ora poco o punto studiati perchè si credeva in generale che questi corpi costituissero dei dielettrici più o meno perfetti.

L'A. facendo delle esperienze sul passaggio della corrente attraverso gli acidi grassi e i saponi è stato condotto a considerare queste sostanze come elettroliti e ha voluto assicurarsi se il loro contatto con due metalli di natura diversa poteva produrre una forza elettromotrice.

Le pile ad acido lauro-stearico, che egli trova, possono essere utilizzate per i telegrafi, telefoni, suonerie elettriche, accensione dei motori ad esplosione, nonchè per piccole lampade portatili. Analogamente costruisce degli accumulatori, fondati sul medesimo

principio, che sopportano forti correnti di carica e presentano notevoli vantaggi.

Ciò prova che il campo poco noto dei fenomeni elettrolitici nelle sostanze derivate dalla serie grassa, merita di essere studiato accuratamente.

KAGAN CHABCHAY J. *Valori possibili per il fattore di potenza* (pp. 263-267). — L'A. da semplici considerazioni teoriche trova che il fattore di potenza non può essere, in valore assoluto, maggiore dell' unità, ed è uguale all' unità quando la f. e. m. e la corrente, seguendo la medesima legge, differendo solo per l' ampiezza, sono in fase od in opposizione.

GALMOZZI I. *Sopra un metodo indiretto per la determinazione del fattore di potenza di un sistema trifase equilibrato* (pp. 268-280). — È noto che la potenza consumata su una linea a corrente trifase qualunque, può essere misurata mediante due wattmetri convenientemente collegati ai conduttori del sistema.

Le indicazioni dei due strumenti sono in generale differenti e possono anche essere di segno contrario, la potenza da misurarsi essendo uguale alla somma algebrica delle due letture.

In questa nota l'A. dimostra e discute una relazione algebrica che dà la tangente dell' angolo di spostamento in funzione del rapporto delle indicazioni dei due wattmetri, allorquando il sistema è equilibrato e segue la legge sinusoidale. Tale relazione costituisce di per se stessa un metodo indiretto per la misura del fattore di potenza nel caso considerato.

GIMENEZ FERNANDEZ S. *Sull' ufficio dell' antenna nella telegrafia senza fili* (pp. 281-316). — L'A. in una precedente nota sulla telegrafia senza fili ne aveva stabilita una semplice teoria, tenendo conto dei noti effetti della capacità e facendo assolutamente astrazione di quelli elettromagnetici.

La teoria non essendo completa, l'A. riprende in questa nota il suo studio proponendosi di constatare quale delle due induzioni elettrostatica ed elettromagnetica è preponderante nella trasmissione fra due antenne.

ELOG V. *Gazogeni a gas povero* (pp. 335-393). — La questione dei generatori e motori a gas povero presenta un interesse speciale per gli elettricisti. Infatti in una officina elettrica è la scelta più o meno buona del motore che ha la più grande influenza sul prezzo del kilowatt-ora, e il motore a gas è quello che occupa il primo posto fra le motrici per il suo consumo ridotto.

L'A. partendo da questi concetti descrive e discute tutti i tipi principali di gazogeni.

SARRAT F. *Contributo allo studio generale delle dinamo autoeccitatrici a corrente continua* (pp. 394 417). — Nel funzionamento delle macchine a corrente continua vi sono due fenomeni che per la loro natura sfuggono alle investigazioni di un calcolo rigoroso; questi sono le fughe magnetiche e la variazione della riluttanza risultante, per i diversi poli, dalla distorsione del flusso provocato dalla reazione trasversale dell'armatura.

L'A., astrazione fatta da questi effetti che non possono essere messi in equazione, mostra un procedimento analitico che permette di studiare, in generale, il funzionamento delle diverse dinamo auto-eccitatrici a corrente continua. Per definire questo funzionamento trova che può concepirsi una curva caratteristica rappresentante la legge di variazione del flusso o della f. e. m. in funzione degli Ampères-giri risultanti (legge che allo stato attuale, non è succettibile di espressione algebrica): questa curva è assolutamente indipendente dalla natura degli induttori disposti sulle macchine e per ciò può giustamente chiamarsi la *caratteristica fondamentale.*

PENSABENE N. *Sul diagramma dei motori asincroni polifasi* (pp. 418 425). — Il diagramma dei motori d'induzione, come resulta dagli studi di Behrend, Blondel, Heyland è complicato e incompleto allorquando si vuol tenere conto delle perdite nel rame del primario: l'A. mostra, in questa nota, come si possa semplificare questo diagramma pure rendendolo più preciso.

L. CASSUTO.

Philosopical Magazine. Serie VI, Vol. 8, 1904.

THOMSON J. J. *Sul momento nel campo elettrico* (pp. 331-356). — Nelle sue « Recent Researches » l'A. ha già dimostrato che il momento è, come l'energia, distribuito in un campo elettromagnetico, e che le variazioni nei momenti dei magneti, dei circuiti percorsi da correnti e di altri sistemi materiali contenuti nel campo sono accompagnate da variazioni uguali ed opposte del campo stesso. Così il campo e i sistemi materiali in esso compresi formano un sistema, il cui momento resta costante in grandezza e direzione. Se i fenomeni elettromagnetici si vogliono spiegare dinamicamente con l'azione di un mezzo che riempie il campo, il concetto di momento in questo campo è essenziale e fondamentale come quello dell'energia. In questa Nota, partendo dal principio che in ogni punto del campo vi è, per unità di volume, un momento μ H D sen θ, normale alle direzioni di H e di D, essendo μ la permeabilità magnetica, H la forza magnetica, D la

polarizzazione elettrica (spostamento del Maxwell) e θ l'angolo fra H e D, l'A. applica questo concetto a diversi casi particolari; e la sua trattazione riesce di grande aiuto a chi voglia addentrarsi nello studio dei fenomeni elettromagnetici.

McClung R. K. *L'ionizzazione prodotta nei gas dai differenti tipi di raggi Röntgen* (pp. 357-373). — I resultati delle esperienze eseguite dall'A. sono i seguenti:

Tipi differenti di raggi Röntgen producono quantità relative diverse di ionizzazione in vari gas; e il fattore principale di tale differenza si ha nel grado di rarefazione del tubo che emette i raggi.

Il rapporto dell'ionizzazione totale nell'ossigeno e nell'anidride solforosa a quella nell'aria tende a divenire tanto più uguale al rapporto fra le densità dei gas, quanto più i raggi divengono duri; mentre nel confronto dell'idrogeno e dell'anidride carbonica con l'aria, la variazione nell'ionizzazione relativa è in direzione opposta. Queste variazioni poi non sembrano dipendere dall'intensità dei raggi finchè restano della stessa natura, ma son dovute invece al cambiamento del tipo dei raggi.

Brooks Miss H. *Diminuzione della radioattività del torio, del radio e dell'attinio* (pp. 373 384). — L'A. studia come decresce la radioattività eccitata in una lamina metallica carica negativamente che venga esposta all'emanazione del torio, del radio e dell'attinio.

Schott G. A. *Sulla cinetica di un sistema di particelle, come illustrazione degli spettri a righe e a bande* (pp. 384-387). — Sono alcune osservazioni alla Nota che sullo stesso soggetto fu pubblicata dal Nagaoka (cfr. *N. Cim.* (5), 7, p. 391). L'A. mostra che il sistema studiato dal Nagaoka non ha veramente i caratteri degli atomi del radio.

Skinner C. A. *Relazione fra la caduta catodica ed anodica nei gas e la serie dei potenziali di contatto* (pp. 387-400). — L'A. fa delle esperienze per riconoscere se sia accettabile la proposizione seguente: La caduta di potenziale al catodo in un dato gas decresce al crescere del valore elettropositivo del metallo, e la caduta anodica decresce al crescere del valore elettronegativo del metallo.

Richardson O. W. *Effetto della scarica luminosa sulla ionizzazione prodotta dal platino incandescente nei gas rarefatti* (pp. 400-410). La dispersione di un filo di platino riscaldato nel vuoto diminuisce continuamente e si annulla dopo un certo tempo. Però quel filo ricupera tale proprietà in diversi modi; e l'A. studia uno di essi, cioè l'esposizione ad una scarica luminosa.

Trowbridge J. e Rollins W. *Il radio e la teoria degli elettroni* (pp. 410-413). — E noto che la teoria degli elettroni cerca di spiegare la conduttività dei metalli, supponendo che durante il passaggio della corrente si muovano degli elettroni fra le molecole del metallo. Queste particelle hanno però nei metalli una traiettoria libera assai minore che nei gas rarefatti, e la loro azione è molto modificata dai raggi X. Per es. un tubo di Geissler, che per una data differenza di potenziale non permette la scarica, è reso conduttore dai raggi X.

Faraday tentò inutilmente di costatare l'azione della luce sulla conduttività degli elettroliti; ma gli A. osservano che se egli avesse avuto a disposizione i raggi X o il radio, non avrebbe mancato di tentare la prova anche coi metalli. Questa prova l'hanno tentata gli A.; ma non hanno potuto riconoscere alcuna variazione di resistenza in un filo di alluminio esposto alle radiazioni del radio nel senso della sua lunghezza. Quindi la manifestazione d'energia emessa dal radio attraversa l'alluminio senza apparente effetto sul meccanismo della corrente elettrica.

È però da notare che non si attribuisce massa alcuna agli elettroni, la cui ipotetica inerzia sarebbe dovuta ad autoinduzione. In questo concetto non sembra probabile che le particelle emesse dal radio, o gli ioni che resultano dalla radiazione di Röntgen, possano influenzare tali particelle immateriali. Si deve forse ritenere che questo resultato negativo conforta la teoria dell'immaterialità degli elettroni, o che invece la teoria dell'azione dissociativa fra le singole molecole è contradetta per la conduttività metallica, poichè le emanazioni del radio producono, come i raggi X, tale effetto dissociativo nel passaggio dell'elettricità nei gas?

Nel laboratorio del Trowbridge è però tuttora sottoposta a studio dal sig. Mac Kay l'azione dei raggi X sopra la resistenza di sottili strati metallici.

Fleming J. A. *Propagazione delle onde elettriche lungo una spirale, e sua applicazione alla misura della lunghezza d'onda nella telegrafia senza fili* (pp. 418-437). — Dalle esperienze di Hertz e dai lavori teorici di Seibt e di Pocklington si era dedotto che le onde elettriche si propagano lungo un filo avvolto a elica con velocità minore di quella, che hanno lungo il medesimo filo disteso in linea retta. Per l'importanza che l'uso delle spirali ha nella telegrafia senza fili, l'A. ha cercato di eseguire delle misure in proposito, con un apparecchio che si presta bene a determinazioni metriche sulle onde elettriche stazionarie.

Una spirale cilindrica fatta con filo fine ricoperto di seta avvolto su un cilindro di legno, lunga 2 metri e formata da un solo

strato di 5000 spire del diametro di 4 cm., è sostenuta orizzontalmente a 45 cm. sopra un tavolo, e parallelamente al suo asse è teso un filo nudo di platinoide, dello spessore di 0,2 mm., che può porsi a distanze diverse dalla spirale e che può essere messo in comunicazione col suolo. Questo filo è chiamato *filo di terra.*

Una delle estremità del filo di quella spirale è unita a un circuito elettrico formato da 2 condensatori, da un grosso filo di rame nudo in parte avvolto a spirale e su cui scorre un contatto mobile per formare un'induttanza variabile, e uno spinterometro chiuso in una cassetta metallica. Le sferette dello spinterometro son poi unite al secondario di un rocchetto di Ruhmkorff, capace di una scintilla di 10 pollici, e tenuto assai lontano.

Quando scoccano le scintille nello spinterometro, nel circuito dei condensatori si producono delle oscillazioni elettriche, e aggiustando convenientemente l'induttanza variabile, si hanno delle onde stazionarie nella lunga spirale; e la posizione esatta dei nodi e dei ventri che si formano in essa può determinarsi assai facilmente con un tubetto senza elettrodi pieno di Neon molto rarefatto, della forma di quei tubi che servono per l'analisi spettrale.

Col suo metodo di misura delle piccole capacità e induttanze, ha trovato che la capacità dell'elica varia da 62 a 40 micro-microfarad allorchè la distanza fra essa e il filo di terra varia da 1 a 10 cm.; mentre è di 36 micro-microfarad quando il filo di terra è stato rimosso.

Avvolgendo poi sopra l'elica una sottile foglia di stagno, la capacità del cilindro così formato si è mantenuta del 6 °/₀ circa superiore a quella dell'elica per tutte le distanze dal filo di terra. Poichè il diametro del cilindro metallico è alquanto superiore a quello dell'elica, si vede che senza errore possibile si può ritenere che la capacità di una spirale metallica a spire molto vicine coincide con quella di un cilindro metallico di uguali dimensioni.

Ciò premesso, dalle equazioni differenziali della propagazione delle onde elettriche il Fleming ricava la relazione

$$V = E\,e^{-\alpha x}(\cos\beta x - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\beta x)$$

pel valore del potenziale ad una distanza x contata lungo l'asse dell'elica; da cui segue che la lunghezza d'onda della distribuzione del potenziale lungo il conduttore è $\frac{2\pi}{\beta}$ e che la velocità dell'onda è $\frac{1}{n}\,\frac{2\pi}{\beta}$, se n è la frequenza dell'oscillazione.

Se poi la resistenza ohmica del filo e la conduttività del dielettrico si posson trascurare in confronto di $\frac{L}{n}$ e di $\frac{C}{n}$, come qui è il caso, per la velocità dell' onda si può prendere

$$W = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

essendo C ed L la capacità e l' induttanza della spirale per unità di lunghezza.

Con questa formola, e coi valori trovati per C, l'A. ottiene per la velocità lungo l' elica un valore che è circa $^1|_{123}$ di quello che la velocità dell' onda possiede nell' etere o lungo un filo rettilineo.

Poichè il legno, per frequenze molto alte, è dotato di una conduttività non trascurabile, conviene, in questi esperimenti, adoperare per le spirali nuclei di ebanite anzichè di legno. Ma la conduttività del dielettrico non si può eliminare del tutto, nè usando l' ebanite, nè facendo spirali senza nucleo solido; talchè si può concludere che le spirali a spire molto vicine hanno per frequenze dell' ordine di 1 milione un' induttanza minore che per frequenze dell' ordine di 100 oscillazioni al secondo, e che quindi non si prestano per campioni d' induttanza per alte frequenze.

Per questi campioni l' unica forma da adottarsi è quella di una sola spira circolare o quadrata. Pel quadrato di lato S, fatto con filo di diametro d l' induttanza in centimetri è data da:

$$L = 8\,S\left(2{,}303 \cdot \log_{10} \frac{16\,S}{d} - 2{,}6\right);$$

e per i reofori che conducono la corrente al quadrato, se hanno una lunghezza l e son posti ad una distanza di D cm. l' uno dall' altro, si ha l' induttanza addizionale

$$L' = 2\,l\left(4{,}606 \log_{.0} \frac{2\,D}{d} + \frac{1}{2}\right).$$

Le misure fatte col tubo a Neon hanno poi mostrato che lungo l' elica la distanza dall' estremità libera al primo nodo è sempre minore di $^1|_4$ dell' onda, ed è in generale uguale ad $^1|_5$ della lunghezza d' onda; invece la distanza fra il 1° e il 2° nodo contati dall' estremità libera, è sempre uguale alla mezza lunghezza d' onda.

Se in un' elica unita con un circuito oscillante si provoca l' oscillazione fondamentale, la lunghezza d' onda è qualche cosa

più di 4 volte la lunghezza dell'elica, ma non giunge a 5 volte.

Con alcune modificazioni l'apparecchio sopra descritto può usarsi per misurare la lunghezza d'onda nella telegrafia senza fili, in cui le frequenze variano da $0,5 \times 10^6$ a 3×10^6.

L'A. ha suggerito il nome di *Kimascopio* (da κυμα, onda) ad ogni disposizione usata per rivelare onde elettriche. Egli chiama perciò *Kummetro* l'apparecchio da lui usato, che è di notevole importanza in rapporto con la telegrafia hertziana, che permette di confrontare la lunghezza d'onda usata, colla sua efficacia telegrafica. Così un'onda lunga 300 piedi si propaga bene sopra il mare, ma non sopra la terra o le città, mentre un'onda cinque volte più lunga si propaga bene sopra terreni accidentati e sopra caseggiati.

Si può poi osservare che misurando l'aumento che si ha nella lunghezza d'onda lungo la spirale aggiungendo una piccola induttanza o una piccola capacità al circuito oscillante, si potranno calcolare i valori di queste aggiunte. In questo modo con il metodo sopra detto può facilmente misurarsi l'induttanza di un filo lungo uno o due piedi, avvolto in una sola spira o in poche spire.

GARRETT A. E. e WILLOWS R. S. *Dissociazione chimica e conduttività elettrica* (pp. 437-454). — In seguito alle esperienze del Beattie, con le quali fu osservato che si aveva una dispersione di elettricità da una lastra isolata su cui fossero riscaldate alcune sostanze, gli A. hanno intrapreso delle ricerche per riconoscere l'origine di tale dispersione.

Lord KELVIN. *Sul fronte e di un sistema di onde in un bacino profondo* (pp. 454 470).

HASELFOOT C. E. e KIRKBY P. J. *Fenomeni elettrici prodotti dall'esplosione del miscuglio d'idrogeno e ossigeno* (pp. 471-481). — Se si produce un'esplosione col gas tonante fra due cilindri coassiali, si osserva la produzione di una corrente allorchè fra i due cilindri si mantiene una differenza di potenziale.

Gli A. hanno studiato accuratamente questo fenomeno, e concludono che è molto improbabile che l'elettrizzazione così ottenuta sia un resultato diretto dell'azione chimica, e che probabilmente è un effetto secondario del calore svolto nella combinazione.

Lord RAYLEIGH. *Sul problema dei tubi sonori aperti* (pp. 481-487). — È una trattazione analitica della correzione da aggiungersi alla lunghezza del tubo affinchè l'estremità aperta sia un ventre.

BOWLKER T. J. *Sull'allungamento della scintilla di un rocchetto, che si ottiene per mezzo di fili ausiliari* (pp. 487-497). — L'A. ha osservato che se si fa avvenire la scarica di un rocchetto

fra due fili, e si allontanano fino a che la scarica stia per cessare, si ha un allungamento notevole della scintilla se si avvicina al polo positivo del rocchetto un filo metallico isolato, in modo che un suo estremo sia vicino alla punta dello spinterometro e l'altro sia quasi a contatto col torchietto positivo del rocchetto. Sul polo negativo questo avvicinamento non ha influenza. Invece la scintilla si allunga, se si presenta normalmente al polo negativo un filo isolato; ciò che non ha influenza sul polo positivo.

Questi due modi posson anche servire a riconoscere il segno dei poli di un rocchetto.

L'A. espone dettagliatamente gli effetti di tali conduttori sulla lunghezza della scintilla e variando opportunamente le disposizioni sperimentali, cerca di spiegarne il meccanismo mediante la produzione di ioni negativi in vicinanza dello spinterometro.

Borton E. F. *Gas radioattivo estratto dal petrolio greggio* (pp. 498-508). — L'A. ha estratto dal petrolio greggio un gas fortemente radioattivo, la cui attività decresce con legge esponenziale e si riduce a metà in giorni 3,125; onde conclude che nel petrolio greggio deve esistere una sostanza radioattiva più persistente dell'emanazione del radio.

Mc F. Orr W. *Sul teorema di Clausius sui cicli, irreversibili e sull'aumento dell'entropia* (pp. 509-528). — Dopo un'interessantissima critica delle discussioni che sono state fatte sul teorema di Clausius, l'A. propone una modificazione nell'enunciato della seconda legge della termodinamica, che è necessaria per poterne dedurre logicamente delle conclusioni sull'aumento dell'entropia.

A. Stefanini.

Pietro Salvioni, *gerente responsabile.*

SULLA VISCOSITÀ DIELETTRICA DEI CONDENSATORI.

Ricerche del Dott. O. M. CORBINO.

Introduzione.

1. Un legame intimo è stato stabilito da alcune recenti teorie tra i fenomeni di residuo offerti da un dielettrico sotto l'azione di un campo costante, e gli altri noti col nome di *isteresi* o *viscosità dielettrica* in un campo variabile. Le teorie medesime, infatti, mentre danno una spiegazione completa di tutti quei fenomeni che avvengono sotto una differenza di potenziale costante, permettono di prevedere i due fatti caratteristici propri dei campi ciclicamente variabili: 1° il ritardo della quantità di elettricità esistente sulle armature di un condensatore rispetto alla loro differenza di potenziale, e la conseguente dissipazione di energia a ogni ciclo; 2° la rotazione di un dielettrico in un campo girante, fenomeno evidentemente collegato al primo.

Con le ricerche di cui riferisco nel presente lavoro viene determinato il ritardo ϑ della quantità di elettricità esistente sulle armature di un condensatore rispetto alla loro differenza di potenziale, cioè al campo elettrico, quando tale differenza è rigorosamente sinusoidale e di frequenza elevata (da due a quattromila cicli per secondo). Il valore assoluto di questo ritardo ϑ ci servirà per il confronto quantitativo con la teoria, quando per lo stesso condensatore sia stato fatto lo studio con differenze di potenziale costanti.

Determinazione del ritardo.

2. Per ottenere la curva d'isteresi bisognerebbe comporre due movimenti oscillatori ortogonali, di cui uno in fase e proporzionale a v, differenza di potenziale, che rappresenta il campo elettrico, e l'altro in fase e proporzionale a q, quantità di elettricità esistente sulle armature. Nella impossibilità di

realizzare un dispositivo che tracci tale curva per frequenze molto elevate, mi son servito di un altro dispositivo molto complesso che permette il tracciamento di una curva alquanto diversa e dalla quale è possibile ricavare il ritardo ϑ. Il condensatore sperimentato era in carta paraffinata, della ditta Keyser e Schmidt, avente la capacità di 1 — 10 microfarad; le correnti erano quelle di Duddel rese sinusoidali nel modo da me altrove indicato [1]), il tracciamento della curva si ebbe per mezzo del pennello di raggi catodici del tubo di Braun.

3. Il condensatore del circuito di Duddel è sottoposto a campi oscillanti, sinusoidalmente o no, intorno al valore di circa 50 volt; si hanno quindi per esso cicli asimmetrici, quasi unilaterali, che non si prestano allo studio semplice del fenomeno. Dopo molti tentativi mi son fermato alla disposizione seguente che permette di ottenere cicli perfettamente simmetrici, tracciando per essi delle curve da cui non è difficile ricavare ϑ.

Ai poli A, B dell' arco (fig. 1) che faceva parte di un circuito su cui agiva la f. e. m. continua di 150 volt e che con-

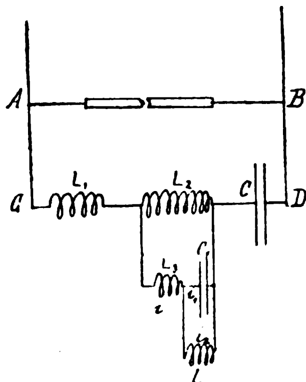


Fig. 1.

teneva un reostato e una forte induttanza, era derivato un altro circuito A G L_1 L_2 C D, formato di due induttanze L_1, L_2

1) Corbino. Sul moccanismo di produzione delle correnti di Duddel. Atti A. E. I. Ottobre 1908.

e di un condensatore C. Ai poli dell' induttanza L_2 era inserito un altro circuito derivato contenente una induttanza L_3, o il condensatore in esperimento C_1. Ai poli di quest' ultimo era inserita una quarta bobina di induttanza L e resistenza r.

Sul tubo di Braun, eccitato da una macchina Toepler a 40 dischi, agivano le due bobine L_3, L con gli assi disposti in modo che gli spostamenti del cerchietto luminoso avvenissero secondo due direzioni ortogonali (una verticale, l' altra orizzontale), e precisamente secondo le linee centrali di un reticolato esistente sul disco fluorescente. Una calamita, opportunamente disposta, riconduceva il cerchietto, senza l' azione delle bobine, nel centro del sistema di coordinate costituito dal reticolato, di modo che gli spostamenti propri delle due bobine si compievano secondo gli assi coordinati. Le bobine L_3, L, di cui la seconda dava spostamenti secondo l' asse orizzontale, avevano, a pari intensità di corrente, azione diversa sul tubo; nel mio caso la deviazione prodotta dal rocchetto L_3 era doppia di quella dovuta al rocchetto L, il che era senza inconvenienti, purchè se ne tenesse il debito conto.

4. Come ebbi a constatare altra volta, le correnti prodotte dall' arco sono troncosinusoidali finchè la corrente alimentatrice di questo ha una intensità minore del valore massimo della corrente di Duddel.

Ma accorciando l' arco, e accrescendo l' intensità della corrente alimentatrice finchè è possibile, si possono avere correnti prossime quanto si vuole alla forma sinusoidale. Raggiunta tale condizione, cui corrisponde il suono più acuto rispetto alle attuali costanti del circuito derivato, le correnti persistono solo per poco tempo. Nel caso presente poi, data la complessità del circuito derivato, e le molteplici cause di dissipazione di energia, l' arco si incantava ancora più facilmente; ma accrescendo l' intensità della corrente alimentatrice e accorciando l' arco con grande lentezza e continuità si poterono avere correnti stabili per un tempo più che sufficiente a far buone misure. La complessità del circuito derivato produceva altre complicazioni. Quando il periodo proprio del sistema $C_1 L r$ era più piccolo di quello corrispondente al suono dell' arco, e

dipendente da tutti gli elementi del complesso, sul disco fluorescente si avevano delle curve deformate e più spesso le curve caratteristiche della composizione di moti sinusoidali di periodo diverso (figure di Lissajous). Se il periodo proprio di $C_1 L r$ era invece molto più grande di quello delle correnti esterne, si avevano in esso correnti forzate deboli ma del periodo di queste ultime. Il condensatore C_1 lavorava in tal caso sotto tensioni limitatissime, e quindi la bobina L essendo percorsa da correnti deboli, era debole la sua azione sul tubo, e sul disco si disegnava una retta quasi verticale.

Solo quando il periodo di $C_1 L r$ era, sempre maggiore, ma prossimo a quello delle correnti esterne, si amplificava molto la corrente nella bobina L, e allora si disegnava sul disco una ellisse di cui cambiava molto la forma e la orientazione degli assi, col variare della differenza dei periodi, fino ad aversi una ellisse a grande asse orizzontale, e quindi il massimo ritardo $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ tra le correnti che percorrono la bobina L_2 e la bobina L. In tali condizioni l'arco si incantava con eccessiva facilità; per questa e per altre ragioni preferii regolare il periodo delle correnti esterne di modo che la ellisse, molto schiacciata, avesse l' asse maggiore orientato a circa 45° dagli assi coordinati. Essa si disegnava allora sul disco molto stabilmente, e mi riuscì facile rilevare sul reticolato i pochi elementi necessari per caratterizzarla; ritenni quindi inutile farne la fotografia.

5. Si tratta però adesso di far vedere come dalla curva ottenuta si possa ricavare il ritardo d' isteresi ϑ.

Sia V (fig. 2) il vettore rappresentante la differenza di potenziale esistente agli estremi del condensatore C_1 e del circuito derivato [L r]; essendo r abbastanza piccolo di fronte a $L\omega$, l' intensità i_2 in questo circuito sarà rappresentata dal vettore I_2 formante con O Y (normale a O V) un piccolo angolo φ dato da

$$\tang \varphi = \frac{r}{L\omega} .$$

D' altra parte la quantità di elettricità Q esistente sulle armature è in ritardo dell' angolo ϑ sul campo elettrico in

fase con V; e quindi l'intensità i_1 nel condensatore sarà in anticipo su Q di $\frac{\pi}{2}$, e su V di $\frac{\pi}{2} - \vartheta$.

L'intensità nella bobina L_3 sarà data in grandezza e fase dal vettore I risultante di I_1 e I_2. Cosicchè l'ellisse, rilevata

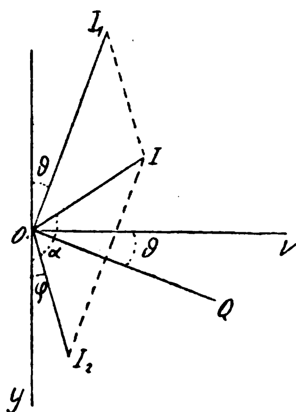


Fig. 2.

sul disco, corrisponde alla composizione di due moti sinusoidali ortogonali di ampiezze I, I_2 e con una differenza di fase α quale risulta dalla figura. Poniamo $\gamma = 180^0 - \alpha$; il valore di α è intimamente legato ai valori di φ e ϑ; si può infatti dimostrare facilmente la relazione:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang}(\varphi + \vartheta) = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\frac{I_2}{I} + \cos\gamma} .$$

Quindi ricavando dalla ellisse il valore di α e di $\frac{I_2}{I}$, e determinando a parte φ, si potrà ricavare ϑ. Si vede intanto che per un determinato $\varphi + \vartheta$, al variare di $\frac{I_2}{I}$, varierà il ritardo α che produce l'ellisse; si spiegano così le molto diverse forme che assume l'ellisse alterando lievissimamente il periodo delle correnti esterne in vicinanza del periodo proprio del sistema $C_1 L r$, con che varia moltissimo I_2. Si noti

ancora che il dispositivo impiegato amplifica l'effetto di ϑ, senza di che l'ellisse corrispondente al ritardo ϑ si sarebbe quasi confusa con una retta.

6. Veniamo adesso ai risultati.

1a Esperienza. — Il condensatore C era costituito da un microfarad in mica della Casa Siemens e Halske; il condensatore C_1, in esperimento, in carta paraffinata aveva la capacità nominale di 1 microfarad, reale, per quella frequenza, di 0,8 microfarad circa. Si avevano inoltre i seguenti valori per le varie induttanze: $L_1 = 0$, $L_2 = 2,25$, $L = 4,3$ milli-henry. Le correnti avevano il periodo, determinato acusticamente, che corrisponde a 3640 oscillazioni complete a secondo.

Il rilievo degli elementi dell'ellisse diede i seguenti risultati:

$\frac{I_2}{I} = \frac{4}{3}$; asse maggiore dell'ellisse $a = 14,4$; asse minore $b = 1$, (espresse in unità della scala tracciata sul disco); inclinazione del grand'asse sull'asse delle I_2 (orizzontale) $\beta =$ arc tang $\frac{3}{2}$ [1]). Or, per una formola nota [2]), indicando con α il ritardo tra due oscillazioni ortogonali che producono un'ellisse di assi a e b, e con una orientazione β su uno dei moti componenti, si ha

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{2}{\text{sen}\,2\beta}\,\frac{a\,b}{b^2 - a^2}. \tag{2}$$

Si deduce dai dati precedenti

$$\gamma = 180^\circ - \alpha = 8^\circ.20'$$

e quindi, sostituendo nella formola (1), si ricava

$$\phi + \vartheta = 3^\circ,45'$$

Per la conoscenza di ϑ occorre una determinazione molto sicura di ϕ. Siccome essa dà luogo a considerazioni piuttosto

1) Trattandosi di ellissi molto schiacciate la tangente dell'angolo β si confondeva col rapporto delle ampiezze componenti; da questo stesso rapporto, tenendo conto dell'ineguale azione delle bobine sul tubo, si ricavava $\frac{I_2}{I}$.

2) Jamin-Bouty. Cours de Physique. T. 3, p. 496**, 1887.

lunghe, dovendosi conoscere la resistenza della bobina per le correnti oscillatorie impiegate, mi occuperò di tale ricerca nel seguente paragrafo.

2a Esperienza. — Si diede all' induttanza L_1 il valore 4,3 millihenry, alla capacità C_1 il valore 3 microfarad, lasciando il resto come nell' esperienza precedente. Il numero delle oscillazioni complete divenne con ciò circa 1900 a secondo. Le costanti dell' ellisse divennero $a = 16$, $b = 1,4$, $\beta = \text{arc tang} \frac{13}{9}$. Se ne deduce per l' angolo α, ricorrendo alla (2),

$$\gamma = 180^\circ - \alpha = 10^\circ . 45'$$

e siccome era ancora

$$\frac{I_2}{I} = \frac{9}{6,5}$$

si ottiene dalla (1)

$$\phi + \vartheta = 4^\circ.30'.$$

3a Esperienza. — Si sperimentò il condensatore in mica invece di quello in carta paraffinata; e poichè la semplice inversione dei due condensatori alterava, per la loro diseguaglianza necessaria, la frequenza delle correnti e il periodo proprio del sistema $C_1 L r$, si aggiungeva in L una induttanza piccola e si faceva variare lievemente la capacità C_1, mantenendola prossima a 1 microfarad. Si ebbe così una ellisse coi seguenti dati:

$$a = 12,8\,, \quad b = 0,7\,, \quad \beta = \text{arc tg} \frac{4}{5}\,.$$

Si aveva inoltre

$$\frac{I_2}{I} = \frac{5}{2}$$

e il numero delle oscillazioni eguale a 4000.

Se ne può dedurre, con l' aiuto delle (1) e (2),

$$\phi + \vartheta = 1^\circ,48'.$$

4a Esperienza. — Potei regolare le cose in modo che per lo scambio dei due condensatori e una alterazione opportuna

delle varie costanti, non mutasse la frequenza delle correnti e l'orientazione della ellisse; era allora marcatissimo l'ingrossamento dell'ellisse nel caso in cui al condensatore C_1 in mica si sostituiva quello in carta paraffinata. Siccome ϕ aveva lo stesso valore nei due casi, vien posto fuori dubbio che ϑ non è nullo, almeno per quest'ultimo condensatore.

7. Avuti così per i vari casi i valori di $\phi + \vartheta$, la conoscenza di ϑ è subordinata a quella di ϕ, che è dato da

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tang} \phi = \frac{r}{L\omega}.$$

In quanto alla determinazione di L mi son servito, con uguali risultati, del metodo di Janet e del metodo diretto di formare col condensatore in mica e con la bobina L un circuito semplice Duddel, valutando il suono limite corrispondente alla sinusoidalità. Si pervenne così al valore

$$L = 4{,}3 \text{ millihenry}.$$

La determinazione di ω fu fatta acusticamente; e per garentirmi dal possibile errore di uno scambio d'ottava, venne determinato grossolanamente $L\omega$ con un amperometro termico in serie e un voltimetro termico in derivazione sulla bobina [1]); la conoscenza di L permetteva di dedurre per ω un valore che precisava l'ottava del suono dell'arco. Si ottenne così entro il comma $N = 3640$ e quindi $\omega = 22900$ e $L\omega = 98$ circa.

Molto più laboriosa fu la misura di r, che era eguale, per correnti continue, a 0,82 ohm. Come è noto [2]), per correnti oscillatorie di alta frequenza la resistenza ohmica di una bobina fu trovata dai sigg. Battelli e Magri parecchie volte maggiore di quella determinata per correnti continue, anche tenendo conto delle formole note per lo *skineffect* in un filo rettilineo, e ciò a causa delle correnti di Foucault che vengon destate nella massa del filo dal campo oscillante proprio della

1) La bontà del metodo di Janet, e l'esattezza degli strumenti termici adesso impiegati era stata da me messa fuori dubbio nel lavoro precedentemente citato (§ 9).

2) Battelli e Magri. R. Acc. di Torino. Serie 2., T. 51, p. 335, 1902 e N. Cimento, 1902. — Dolezalek, Ann. d. Phys. 12, p. 1142, 1903.

bobina. A un risultato simile pervenne più tardi il Dolezalek con correnti persistenti di frequenza molto minore.

Una spiegazione del fenomeno, conducente a una formola che esprime bene i risultati delle esperienze di quest' ultimo, venne data dal Wien [1]).

Per una bobina qualsiasi tanto il Dolezalek che il Wien giungono al risultato che la variazione di resistenza per N oscillazioni a secondo è proporzionale al quadrato di questo numero, cosicchè indicando con R' la resistenza per correnti alternate e con R la resistenza per correnti continue, si può porre

(4) $$R' = R + K N^2$$

ove K indica una costante.

Nella teoria di Wien K è dato per una bobina qualsiasi in funzione dei dati geometrici della bobina medesima della resistenza del filo, e di un certo coefficiente G che esprime il valore del campo prodotto dalla bobina nell' estremo più interno del filo, quando la corrente che vi circola è eguale a 1. Nel caso di una bobina molto lunga o di una molto piatta, sostituendo per G i valori calcolati da Heidweiller, il Wien perviene a due formole delle quali nessuna è applicabile alla bobina da me adoperata. Una determinazione sperimentale di G, da me tentata con l' azione su un ago magnetometrico, e con la misura del campo medio, dovuto alla corrente 1, nella regione occupata dal rame [2]), non mi diede risultati sicuri; a ogni modo ne risultava come ordine di grandezza per K

$$K \backsim 10^{-7} \text{ ohm}.$$

8. Un valore limite per K, indipendentemente da ogni teoria, può essere invece assegnato in base ai risultati della 3ª esperienza; sarà questo il valore che adotterò per K, in modo da esser sicuro che il valore dedotto per il ritardo ϑ sia *inferiore* al vero.

1) Wien. Ann. d. Phys. 14, p. 1, 1904.

2) Tale misura fu fatta sottraendo dal flusso totale traversante la bobina per una corrente 1, cioè da L, la parte di flusso traversante il canale e valutata con un avvolgimento ausiliare introdotto nel canale medesimo.

Nell' esperienza 3ª, sperimentando col condensatore in mica, avevo trovato

$$\varphi + \vartheta = 1^{\circ},48'.$$

Or anche ammettendo che il condensatore in mica sia assolutamente privo di ritardo, che cioè per esso sia

$$\vartheta = 0$$

si ricava per valore superiore al vero di φ, con $N = 4000$,

$$\varphi = 1^{\circ},48'.$$

Fissato il valore di φ, la formola (3) ci dà

$$R' = 3,32 \text{ ohm}$$

e quindi, per la (4),

$$K = 1,5 \times 10^{-7} \text{ ohm}$$

cioè un valore alquanto superiore ma abbastanza prossimo a quello dedotto con la teoria di Wien.

9. Calcolato K si possono dedurre facilmente con la (3) i valori di φ corrispondenti alle esperienze 1ª e 2ª; si ha così per la 1ª

$$\varphi = 1^{\circ},35'$$

e per la seconda [2])

$$\varphi = 1^{\circ},30'.$$

Si ottiene quindi per il ritardo ϑ nel caso del condensatore in carta paraffinata:

per 3640 oscillaz., $\vartheta = 2^{\circ},10'$
per 1900 » $\vartheta = 3^{\circ}$.

Una deduzione sul senso di variazione di ϑ con la frequenza sarebbe forse prematura, data l' incertezza nel valore di K e quindi di φ; resta però assodato, e vedremo in seguito

2) Per l' effetto Battelli e Magri già a queste frequenze r aumenta più rapidamente di $L\omega$ con N, quindi φ cresce al crescere della frequenza.

l'importanza di tale conclusione, che ϑ è ancora misurabile a così elevate frequenze e di un ordine di grandezza non inferiore a 2° [1]).

L'esperienza 4ª del resto mette in evidenza in modo quasi qualitativo che ϑ non è nullo, almeno per il condensatore in carta paraffinata.

Confronto con la teoria.

10. Il ritardo ϑ trovato potrebbe essere attribuito al cattivo isolamento del condensatore; effettivamente una resistenza ρ di valore opportuno, derivata ai poli del condensatore, avrebbe prodotto un' azione analoga, poichè per la sua presenza il vettore I_1 rappresentante l'intensità nel condensatore, invece che in quadratura col vettore V rappresentante la tensione, avrebbe avuto un anticipo $\frac{\pi}{2} - \psi$, ove è

$$\psi = \text{arc tang} \frac{1}{C \rho \omega} .$$

Fatta tale ipotesi, cioè identificato con ψ il ritardo ϑ trovato, dovrebbe essere

$$\rho = 1400 \text{ ohm circa.}$$

Tale supposizione è però assolutamente da escludere, poichè la resistenza d'isolamento del condensatore, dedotta dalla intensità limite di carica dopo un tempo grandissimo, risultò *superiore a 10 milioni di ohm.* Esclusa quindi la possibilità di una influenza apprezzabile della conduzione e ammesso, per conseguenza, che il ritardo superiore a 2° sia dovuto soltanto all' isteresi, non ci resta che confrontare i risultati dell' esperienza con le previsioni deducibili dalle teorie finora proposte per spiegare la lenta polarizzabilità dei dielettrici, e precisamente dalle teorie di Hess [2]), Pellat [3]) e Maccarrone [4]).

1) La potenza dissipata per isteresi è quindi superiore al 4 % dei volt-ampere efficaci; e quindi nel caso dell' esperienza 1ª siccome il condensatore lavorava sotto 68 volt efficaci e con una corrente di 1,22 ampere efficaci, il consumo di energia era superiore a 3 watt sopra circa 83 volt-ampere efficaci.

2) Hess. Journ. de Phys. 3, 1, p. 459; 1892.

3) Pellat. Ann. d. Chim. et d. Phys. 7, t. 18, p. 150, 1899.

4) Maccarrone. Nuovo Cimento, serie 5., vol. IV, p. 313, 1902.

11. Cominciamo dalla prima. In essa, che fa capo alla teoria dei dielettrici eterogenei di Maxwell, si ammette che un dielettrico comune sia costituito da un mezzo dielettricamente perfetto, nel quale siano disseminate particelle di una sostanza in cui *coesistono* una certa costante dielettrica e una certa conducibilità.

Se ne deduce che una lamina dielettrica sottoposta a una differenza di potenziale tra le facce estreme si comporterà come un particolare sistema composto di due condensatori perfetti in serie, di capacità C, C', di cui il secondo shuntato con una resistenza ohmica ρ'. Così se il condensatore reale viene inserito, per es., in un circuito contenente una f. e. m. costante E e una resistenza R, l'intensità I di carica potrà calcolarsi sostituendogli il sistema equivalente A B, con che si ha

$$(5) \qquad I = \frac{E}{R(\alpha_1 - \alpha_2)} \left[\left(\alpha_1 + \frac{1}{C'\rho'} \right) e^{\alpha_1 t} - \left(\alpha_2 + \frac{1}{C'\rho'} \right) e^{\alpha_2 t} \right]$$

nella quale α_1 e α_2 sono date dalle formole

$$(6) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{matrix}\right\} = \frac{-\left(1 + \frac{R}{\rho'} + \frac{C'}{C}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{R}{\rho'} + \frac{C'}{C}\right)^2 - 4\frac{R}{\rho'}\frac{C'}{C}}}{2RC'} .$$

Tanto queste formole che le altre esprimenti la differenza di potenziale ai poli del condensatore, coincidono con l'andamento dei fenomeni nel caso reale; in particolare si ritrova la variazione assintotica della capacità con la durata di carica: il valore della capacità al primo istante è dato da $\frac{CC'}{C + C'}$; il valore limite dopo un tempo infinito è dato invece da C. Si vede inoltre dalla formola (5) che l'intensità della corrente di carica risulta dalla somma di due esponenziali, con decrementi logaritmici α_1 e α_2 che dipendono dalle varie costanti secondo la formula (6).

12. Se la sostituzione del sistema A B al condensatore reale è legittima anche nel caso di f. e. m. rapidamente variabili, noi possiamo con facilità, almeno per f. e. m. sinusoidali, prevedere e calcolare un ritardo ϑ fra la tensione esi-

stente ai poli del condensatore e la quantità di elettricità accumulata sulle armature; tale calcolo riesce, infatti, agevole per il sistema A B.

Indichiamo con i la corrente nel condensatore C, eguale alla corrente nel resto del circuito, e con i_1, i_2 lo intensità nel condensatore C' e nella resistenza ρ'. In regime permanente tutte le grandezze varieranno sinusoidalmente col tempo e ci possiamo quindi servire del metodo grafico vettoriale.

Siano V_1 e V_2 i vettori rappresentanti le tensioni v_1, v_2 esistenti agli estremi dei condensatori C, C'; e inoltre I, I_1, I_2 i vettori rappresentanti i, i_1 e i_2. Il vettore I sarà in anticipo di 90° su V_1, mentre in fase con V_1 sarà il vettore Q rappresentante la quantità di elettricità circolata, eguale a $\int i\,dt$.

D' altra parte il vettore I deve essere la somma geometrica di I_1 e I_2, dei quali il primo in anticipo di 90° su V_2, il secondo in fase con V_2. Ne risulta la distribuzione dei vettori data dalla fig. 3.

La somma geometrica V di V_1 e V_2 ci darà la tensione totale agli estremi del sistema A B, cioè del condensatore

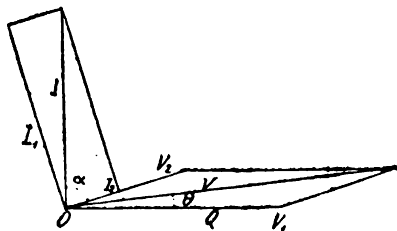


Fig. 3.

reale; si vede subito che essa è in anticipo di un angolo ϑ sulla quantità di elettricità Q. Chiamato α l' anticipo di I su V_2 si ha intanto

$$V_2 = \frac{1}{C'\omega} I_1 = \rho' I_2 ; \qquad V_1 = \frac{1}{C\omega} I$$

$$\frac{I_1}{I} = \operatorname{sen} \alpha ; \qquad \frac{I_1}{I_2} = \operatorname{tg} \alpha = \rho' C' \omega .$$

Inoltre il triangolò dei vettori V, V_1, V_2 dà

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\cos (\alpha + \vartheta)} .$$

Sostituendo in questa i valori precedenti si ha, dopo alquante semplici trasformazioni.

$$(7) \qquad \operatorname{tang} \vartheta = \frac{C \rho' \omega}{1 + (C + C') C' \rho'^2 \omega^2} .$$

Se si rappresentano con una curva i valori di tang ϑ corrispondenti ai diversi valori di ω, si ha la nota curva caratteristica della coppia nei motori asincroni a campo girante, curva che parte da zero per $\omega = 0$, raggiunge un massimo per

$$(C + C') C' \rho'^2 \omega^2 = 1$$

e poi torna a diminuire assintoticamente fino a zero per ω infinito.

13. Intanto lo studio del condensatore di carta paraffinata con campi costanti mi diede come valori della capacità per una durata di carica brevissima o molto lunga, i numeri 0,8 e 1 microfarad; se ne deducono per C e C'

$$C = 1 \text{ microfar} ; \quad C' = 4 \text{ microfar.}$$

Sostituendo nella (7) a tang ϑ il valore trovato per il ritardo con 3600 cicli a secondo e a C e C' i valori precedenti, si ottiene per ρ' un' equazione di secondo grado che ha per radici 70 ohm e 1,8 ohm.

Adunque, per giustificare il ritardo trovato, il condensatore reale dovrebbe essere equivalente a un sistema A B costituito dalle due capacità 1 microfar. e 4 microfar. di cui la seconda shuntata con un vero corto circuito di 70 ovvero di 1,8 ohm.

Or questi valori per ρ' sono semplicemente inammissibili se si tengon presenti le qualità del condensatore sotto tensioni costanti; ne risulterebbero infatti per α_1 e α_2 numeri tali che la corrente di carica per f. e. m. costanti dovrebbe praticamente annullarsi dopo un tempo impercettibile; mentre essa era ancora rivelabile dopo più di 15 minuti secondi.

Inversamente dalla curva, ricavata sperimentalmente, delle intensità di carica in funzione del tempo con f. e. m. costanti

si può dedurre l' ordine di grandezza del decremento della più lenta delle due esponenziali, e quindi di ρ'; si ottiene così

$$\rho' \backsim 200\,000 \text{ ohm}$$

cioè un numero incomparabilmente maggiore di quello trovato col metodo dinamico.

In altri termini la teoria di Hess prevede, se è ancora valida a frequenze elevate, un ritardo ϑ *praticamente nullo,* mentre noi abbiamo messo fuori dubbio che tale ritardo è superiore a 2 gradi. Si deve quindi concludere che la teoria stessa non vale più a frequenze alquanto elevate.

14. A una conclusione analoga si viene dopo il confronto quantitativo con la teoria del Pellat.

Questo autorevole fisico ha della *polarizzazione* dei dielettrici una concezione essenzialmente diversa dalla ordinaria, chiamando egli *polarizzazione reale* lo stato di elettrizzazione effettiva, opposta sulle due facce, che assume una lamina isolante in un campo elettrico dopo un certo tempo d' azione di questo. Tale polarizzazione sarebbe propria soltanto dei dielettrici imperfetti; essa però non ha niente da fare con la *polarizzazione fittizia* ammessa generalmente per spiegare l' aumento di capacità di un condensatore a causa della sostituzione di un dielettrico all' aria.

Se si indica con j la densità della carica di polarizzazione *reale* al tempo t sulla faccia della lamina, con c lo spessore di questa, eguale alla distanza delle armature, con S la superficie di queste, con V la loro differenza di potenziale e infine con K il *potere specifico induttore vero* corrispondente alla capacità del condensatore per un tempo brevissimo di carica, allora la carica totale m portata da un' armatura al tempo t sarà

$$m = \frac{\text{K S V}}{4\pi c} + \text{S} j\,. \tag{8}$$

La j sarebbe appunto quella carica crescente col tempo e messa in evidenza da esperienze dirette dello stesso Pellat. Essa assumerebbe per un tempo infinito d' azione del campo costante un valore limite J, e si accosterebbe a questo valore

con una velocità proporzionale alla differenza tra il valore finale J e l' attuale j. Si avrebbe cioè, indicando con b una costante

$$\frac{dj}{dt} = b(J - j).$$

È questa la sola ipotesi fatta dal Pellat, ipotesi che per la legge sperimentale della *sovrapposizione dei residui*, enunciata dal Curie nel caso di campi costanti, si deduce dall'altra meno restrittiva che la velocità di variazione $\frac{dj}{dt}$ sia soltanto funzione della differenza $J - j$ [1]).

L' equazione precedente integrata, e con l' introduzione dei valori di j per $t = 0$ e per $t = \infty$ dà

$$j = J(1 - e^{-bt})$$

e quindi la (8) diviene, sempre nel caso di V costante,

$$m = \frac{KSV}{4\pi c} + SJ(1 - e^{-bt}).$$

L' intensità della corrente di carica, *esclusi i primissimi istanti in cui si compie la carica dovuta al 1° termine*, sarebbe dunque

$$i = SJb\,e^{-bt}.$$

La J alla sua volta è esprimibile in funzione del campo elettrico con la relazione

$$J = h\frac{V}{c}$$

ove h è praticamente costante per piccoli valori del campo; si avrebbe quindi

$$(9) \qquad i = Sh\frac{V}{c}b\,e^{-bt} = \frac{4\pi C}{K}hVb\,e^{-bt}$$

nella quale C indica la capacità del condensatore corrispondente al potere induttore specifico vero K.

1) Pellat. Ann. d. Chim. et d. Phys. 7, t. 18, p. 571. 1899.

Come è evidente un dielettrico sarebbe adunque caratterizzato dalle due costanti h e b, di cui la prima misura, in certa guisa, la totale variazione della costante dielettrica dopo un tempo infinito di carica, e la seconda la rapidità con cui praticamente si raggiunge il valore finale della costante dielettrica o della capacità del condensatore.

15. Nel caso di campi variabili, e precisamente con campi sinusoidali, supposto cioè

$$V = V_0 \operatorname{sen} \omega t$$

anche J varierà sinusoidalmente poichè proporzionale a V. La equazione differenziale in $\frac{dj}{dt}$ dà allora [1])

$$J = B \operatorname{sen} (\omega t + \delta)$$

con

$$B = \frac{V_0 h}{c} \frac{b}{\sqrt{b^2 + \omega^2}},$$

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{\omega}{\sqrt{b^2 + \omega^2}}, \qquad \cos \delta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + \omega^2}}$$

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\omega}{b}$$

cioè anche j varierà sinusoidalmente, con un ritardo δ su V.

La quantità di elettricità m sarà quindi data, per la (8) dalla relazione

$$m = \frac{K \delta V_0 \operatorname{sen} \omega t}{4 \pi c} + \delta \frac{V_0 h}{c} \frac{b}{\sqrt{b^2 + \omega^2}} \operatorname{sen} (\omega t + \delta)$$

$$= P \operatorname{sen} \omega t + Q \operatorname{sen} (\omega t + \delta)$$

in cui P e Q denotano i coefficienti dei due seni.

La composizione dei due vettori O A, O B (fig. 4) rappresentanti $P \operatorname{sen} \omega t$ e $Q \operatorname{sen} (\omega t + \delta)$, di cui il primo in fase con V, ci darà per m il vettore O C, che fa con V_0 l'angolo ϑ; è

1) Pellat, l. c. p. 169.

proprio questo ritardo ϑ della quantità di elettricità sul campo che noi abbiamo misurato con le esperienze surriferite.

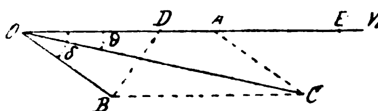


Fig. 4.

Dalla relazione

$$\frac{\mathrm{OB}}{\operatorname{sen}\vartheta}=\frac{\mathrm{OA}}{\operatorname{sen}(\delta-\vartheta)}$$

risultante dal triangolo O A C, e dai valori noti di O A, O B, sen δ e cos δ si ricava facilmente il valore di tg ϑ:

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{tg}\vartheta=\frac{b\,h\,\omega}{b^2\left(h+\frac{K}{4\pi}\right)+\frac{K}{4\pi}\omega^2}$$

si ritrova cioè una espressione analoga a quella cui siamo pervenuti con la teoria di Hess, e che dà luogo, rappresentata graficamente rispetto ai diversi valori di ω, alla stessa curva dei motori asincroni [1]).

16. Per il confronto quantitativo con i risultati dell' esperienza bisogna ricavare, con campi costanti, i valori di b e h propri del condensatore da me impiegato.

Per alcuni buonissimi condensatori in carta paraffinata il Prof. Lombardi [2]) aveva trovato una variazione totale della carica di circa il 3 %, e che inoltre la variazione non era più percettibile dopo cinque minuti secondi, cosicchè in questo

1) Osservando che la relazione $\operatorname{tg}\delta=\frac{\omega}{b}$ permette di passare facilmente, per via grafica, dal valore di ω a quello di δ, e che inoltre al variare di ω e quindi di δ, il punto B si muove su un semicerchio avente per diametro

$$\mathrm{OD}=\frac{\delta\,V_0\,h}{c}$$

e che il punto C si muove su un semicerchio eguale di diametro A E = O D, si può avere una elegante soluzione grafica del problema di determinare tg ϑ quando è noto ω, problema che ha per soluzione analitica la (10).

2) Lombardi. L' Elettricista, anno 1896, p. 1.

tempo il condensatore acquistava la sua massima carica. Ne risulta che per b e h si avrebbero gli *ordini di grandezza*

$$h \backsim \frac{1}{100}, \qquad b \backsim 1 .$$

Il mio condensatore è meno buono. Osservando infatti l'intensità della corrente di carica sotto la tensione di 10 volt nei tempi successivi alla chiusura del circuito, (detrattane, s'intende, l'intensità della corrente finale di conduzione) ne risultò, per mezzo della (9)

$$h \backsim \frac{1}{10}, \qquad b \backsim \frac{1}{10} .$$

Tanto questi valori quanto gli altri che vi si posson sostituire esagerando in un senso o in un altro le buone o le cattive qualità del condensatore entro limiti ragionevoli, darebbero per tang ϑ un valore *praticamente nullo* nel caso di 3600 oscillazioni; mentre, inversamente, per avere il valore corrispondente a $\vartheta = 2^{\circ}$ circa da me trovato, si dovrebbe attribuire, tenuto fermo il valore di h, a b un valore *superiore a 3000*, con che la corrente di carica sarebbe praticamente nulla dopo un tempo impercettibile.

Anche la teoria del Pellat, adunque, non prevede il ritardo ϑ da me trovato.

17. Veniamo infine alla teoria del Maccarrone, la quale farebbe dipendere il fenomeno del ritardo della polarizzazione nei campi variabili, e le conseguenti rotazioni dei dielettrici in un campo elettrostatico girante, da una particolare forma di loro conducibilità interna.

In un dielettrico sottoposto all'azione di un campo si desterebbe, oltre alla prima carica istantanea di polarizzazione una corrente u rilegata al campo *effettivo* ξ esistente all'interno del dielettrico, dalla formola

$$u = a + b\,\xi$$

ove a e b sono costanti.

Il campo effettivo è dato da

$$\xi = X - m\,\alpha$$

nella quale X denota il campo esterno, α la carica complessiva esistente sulla faccia del dielettrico ed m un coefficiente dipendente dalle dimensioni. D' altra parte la corrente u è legata alla carica α dalla relazione

$$u = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Da alcune esperienze sulla carica finale α corrispondente a un tempo infinito l'Autore deduce inoltre che a dev' essere proporzionale a X, e quindi, detta A' una nuova costante,

$$a = a' \mathrm{X}$$

e in conseguenza

$$u = a' \mathrm{X} + b\,\xi.$$

Per $a' = 0$, nota l'Autore, si cade nella ordinaria conducibilità.

La forma particolare di conducibilità ammessa dal Maccarrone apparisce però come non necessaria, non solo, ma anche come poco probabile. Infatti dopo un tempo tanto lungo che le cariche di polarizzazione e quelle di conduzione annullino il campo all' interno della lamina dielettrica, cioè quando fosse $\xi = 0$, non si capisce perchè, cessata la causa, non debba cessare anche la corrente e quindi annullarsi anche u, il che conduce alla condizione $a = a' = 0$. Nè il risultato sperimentale del Maccarrone, secondo il quale la carica limite sarebbe proporzionale al campo, si oppone a tale annullamento di a, che anzi l' ipotesi di tale annullamento viene suggerita subito dal risultato medesimo.

Nulla vieta di ammettere, come vuole il Maccarrone, che la corrente nei dielettrici non segua la legge di Ohm; si potranno allora tirare in conto dei termini in ξ^2, in ξ^3 ecc.; ma qualunque sia la forma supposta per u, la corrente stessa deve annullarsi al cessare del campo effettivo ξ che la produce.

18. Ridotta così la ipotesi del Maccarrone a quella di una semplice conducibilità, se ne può ancora *immediatamente* dedurre la spiegazione qualitativa del ritardo di polarizzazione

e della rotazione del dielettrico in un campo girante.

Si ha infatti:

$$u = \frac{d\alpha}{dt} = b\,\xi\,; \qquad \xi = X - m\,\alpha$$

e quindi

$$m\,\alpha + \frac{1}{b}\frac{d\alpha}{dt} = X.$$

La relazione che lega α, t e X è quindi identica all'altra

$$r\,i + L\frac{di}{dt} = E$$

che lega in una resistenza induttiva l'intensità, il tempo e la f. e. m.; all'induttanza corrisponde $\frac{1}{b}$, e alla resistenza ohmica m; cosicchè se X varia sinusoidalmente, anche α varierà sinusoidalmente con un ritardo δ dato da

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\frac{1}{b}\,\omega}{m}\,.$$

E così in un campo elettrostatico rotante si desteranno due polarizzazioni alternate sfasate di 90° tra loro, e tali da produrre una polarizzazione rotante in ritardo δ sul campo esterno. La coppia in funzione della velocità si potrà calcolare in modo semplice, come nel caso di un sistema di due telai ortogonali conduttori disposti in un campo magnetico rotante; la si troverà esprimibile, graficamente, con la solita curva dei motori asincroni, corrispondendo all'induttanza del rotore $\frac{1}{b}$ e alla sua resistenza il coefficiente m. A risultati analoghi perviene appunto il Maccarrone.

19. Ciò che si è detto del ritardo vale esclusivamente nel caso di un dielettrico posto in un campo sinusoidale creato da armature *staccate*. Nè bisogna confondere, in tal caso, le cariche di polarizzazione esistenti sulla lamina dielettrica e quelle

esistenti sulle armature, le sole che noi misuriamo nel circuito di cui esse fan parte. Senza bisogno di sviluppare i calcoli relativi si riconosce subito che *nel caso di armature staccate* la teoria del Maccarrone si identifica con quella di Hess, poichè la lamina d' aria interposta tra le armature e il dielettrico corrisponde al condensatore C, e la lamina del dielettrico fa l' ufficio del condensatore shuntato C'.

Quando invece le armature sono attaccate, come avviene per i condensatori ordinari, il dielettrico assume il comportamento di un semplice condensatore shuntato; e allora la contradizione con le presenti ricerche risulta chiaramente da quanto è detto nel § 10, infatti la resistenza interna del condensatore dovrebbe essere, per spiegare il ritardo ϑ da me trovato, circa 1400 ohm, mentre la sua vera resistenza era circa 10000 volte maggiore.

20. A parte tale contradizione, che è comune alle altre teorie, è necessario però riconoscere che anche con campi costanti la teoria del Maccarrone non risponde al vero andamento dei fenomeni. Essa è infatti in contrasto con un certo numero di risultati sperimentali ormai definitivamente acquisiti alla scienza quali i seguenti:

1° Alcuni corpi, come la mica, pur presentando evidentissimi fenomeni di polarizzazione residua, oppongono un ostacolo quasi assoluto al passaggio dell' elettricità (Bouty).

2° Per questi corpi alla corrente residua di carica, prolungata per un tempo qualsiasi, corrisponde un identico e inverso regime di correnti di scarica quando si esclude dal circuito la pila (Bouty).

In altri termini c' è conservazione della quantità di elettricità, pur non essendovi conservazione dell'energia elettrica; ciò non potrebbe avvenire, con armature attaccate, se la polarizzazione residua fosse dovuta a conduzione, cioè a passaggio effettivo di elettricità dall' una all' altra armatura attraverso al dielettrico.

3° Abbandonando una lamina dielettrica per lungo tempo in un campo costante, e spezzandola in due con un piano parallelo alle facce terminali, le due metà riproducono l'espe-

rienza della calamita spezzata, cioè manifestano elettrizzazioni opposte sulle due facce, pur contenendo ciascuna una carica *totale* algebricamente nulla (Pellat).

Invece la teoria del Maccarrone fa prevedere in tal caso per la lamina dielettrica un comportamento analogo a quello di una lamina conduttrice, cioè una separazione più o meno lenta di cariche *per influenza*, cosicchè per divisione a metà della lamina si dovrebbe ottenere sull' una un eccesso di carica negativa, sull' altra di positiva.

Per tutto ciò mi sembra siano in migliori condizioni le due altre teorie, che almeno spiegano completamente i fenomeni prodotti da un campo costante.

21. Anch' esse però, come si è visto son contradette dai risultati delle presenti ricerche, nè ciò deve recarci grande meraviglia, poichè esse e le altre teorie note sono state stabilite tenendo presenti solo alcune limitate proprietà dei dielettrici e non tutti i fenomeni che in essi hanno luogo.

Si immagini un dielettrico sottoposto all' azione di un campo oscillante con frequenza progressivamente crescente. Una teoria completa dei dielettrici dovrebbe comprendere e spiegare tutti i seguenti fenomeni:

1° per una frequenza zero, cioè per campi costanti, i fenomeni di lenta polarizzabilità;

2° per le frequenze industriali, e poi per quelle impiegate nelle presenti ricerche, la dissipazione di energia, cioè il ritardo della polarizzazione e la variazione di capacità;

3° infine con le frequenze più alte delle oscillazioni hertziane, e poi dei raggi ultrarossi, dei luminosi e degli ultravioletti, i fenomeni di dispersione normale e anomala e di assorbimento corrispondenti a diverse bande.

Invece noi possediamo teorie soddisfacenti per la spiegazione dei fenomeni della 1ª categoria, ma che conducono all' assoluta trasparenza per le oscillazioni già alquanto rapide e per tutte quelle al di là; come d' altra parte abbiamo teorie complete per i fenomeni della 3ª categoria (teorie della dispersione e dell' assorbimento) ma che presuppongono una perfetta elasticità elettrica, facendo intervenire soltanto resistenze pas-

sive interne, causa di assorbimento nel caso di oscillazioni molto rapide, ma che non han niente da fare coi fenomeni della 1ª categoria.

Eppure non sembra difficile concepire un sistema che tenendo presenti tutte le proprietà dei dielettrici, tutte le spieghi per la fusione dei concetti fondamentali delle teorie estreme.

Supponiamo, per es., che si voglia estendere la teoria di Hess in modo da farle comprendere anche i fatti da me osservati alla frequenza di circa 3600 periodi per secondo. Basterà immaginare che nel mezzo isolante siano disseminate due specie diverse di particelle conduttrici, di cui una di maggiore conducibilità; il modello di Hess si trasforma con ciò nell'altro più complesso di tre condensatori in serie, di capacità C_1, C_2, C_3, dei quali il secondo e il terzo shuntati rispettivamente con le resistenze r_2, r_3. Se le costanti si scelgono nel seguente modo

$$C_1 = 1 \text{ microf.}, \quad C_2 = 4 \text{ m. f.}, \quad C_3 = 50 \text{ m. f.}$$
$$r_2 = 200\,000 \text{ ohm}, \quad r_3 = 6 \text{ ohm}$$

allora il 3° condensatore produrrà effetti insensibili con campi costanti, poichè la sua influenza si esplica in un tempo brevissimo, e quindi praticamente il sistema presenterà gli stessi effetti del mio condensatore, cioè una variazione complessiva di capacità di circa il 20 % e una corrente di carica con una esponenziale a lento decremento logaritmico; lo stesso sistema presenterebbe poi alla frequenza di 3600 periodi per secondo una ulteriore piccola variazione di capacità (2 %), il che non si può escludere che avvenga in realtà, e un ritardo ϑ dell'ordine di grandezza di quello da me osservato, entrando allora in giuoco l'azione del 3° condensatore [1]).

Con ulteriori estensioni della teoria di Hess si potrebbero spiegare i fenomeni della 3ª categoria, immaginando dissemi-

1) Si è continuato, in ciò che precede, a esprimere le capacità, come è uso che non mi sembra lodevole, riferendole a quelle corrispondenti a *durate molto piccole* di carica. Sarebbe però preferibile, se si vuol caratterizzare la capacità di un dato condensatore, ricorrere al valore di essa per una durata grandissima di carica; solo così infatti ci si servirebbe di una grandezza perfettamente definita e accessibile all'esperienza: invece la locuzione *capacità per un tempo brevissimo di carica* è ben incerta, poichè è proprio per le oscillazioni molto rapide che l'esperienza rivela valori variabilissimi della costante dielettrica, corrispondenti alla dispersione normale o anomala.

nate nel mezzo isolante altre particelle del genere di quelle che si considerano nella teoria elettromagnetica della dispersione e dell' assorbimento. Lo sviluppo completo di una tale teoria non presenta grandi difficoltà, prevalendo per un certo campo di frequenza gli effetti di una sola specie di particelle, e le altre influendo in misura tanto minore quanto più la frequenza considerata è lontana da quella per cui ciascuna specie esercita una influenza massima; allo stesso modo come una riga d' assorbimento fa sentire la sua azione sulla curva generale di assorbimento e di dispersione in qualsiasi posto dello spettro, però tanto meno quanto più la regione considerata è lontana dalla riga medesima.

22. I mezzi per l' esecuzione delle presenti ricerche mi furono largamente forniti dal Ch.mo Prof. D. Macaluso, Direttore dell' Istituto Fisico della R. Università di Palermo. Compio un gradito dovere esternandogli qui la dovuta riconoscenza.

TRASPARENZA DEI LIQUIDI PER LE ONDE HERTZIANE,

del Dott. VINCENZO BUSCEMI [1]).

1.

Da un accurato esame dei pochi lavori fino ad oggi eseguiti sulla trasparenza dei corpi per le onde elettriche, emerge chiaramente come i mezzi adoperati per tali ricerche sieno stati poco adatti per confrontare fra di loro i risultati ottenuti su misure quantitative.

Lo stesso E. Branly [2]), il fisico che più se ne sia occupato, adopera come rivelatore delle onde elettriche un coherer, il quale può darci un' idea poco esatta dell' energia emessa dal radiatore, della distanza a cui questo si trova.

1) Dal Bollettino dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania. Fascicolo 83, 1904.

2) Journal de Physique, t. 9, 3. ser., pag. 144, anno 1900.

Come si sa bene, la sensibilità del coherer è variabilissima, ed è molto difficile il regolarlo, quindi i risultati finali non possono condurci ad una conclusione su cui si può contare con sicurezza.

Inoltre, in queste determinazioni si è ammessa come vera, anche per queste radiazioni, la legge dell'inversa del quadrato della distanza, legge che potrebbe essere infirmata dall'assorbimento dell'aria e ch'è stata verificata sempre con gli stessi mezzi; perciò nulla ci autorizza chiamarla esatta come lo è per l'energia sonora, per l'energia raggiante, ecc.

Finora, per quanto io sappia, non abbiamo apparecchi di precisione per misure quantitative delle onde hertziane. Poichè, se il ricevitore è un coherer, abbiamo innanzi visto quali inconvenienti principali esso presenta per tali misure; se è un detector Marconi, allora siamo costretti ad usare il telefono e a giudicare dell'energia che arriva alla stazione ricevente dal rumore più o meno intenso che il telefono produce nel nostro orecchio.

Si capisce come anche quest'altro metodo non è per nulla esatto per adottarlo a misure quantitative.

Fra altri metodi più degni di considerazione, dal punto di vista di misure quantitative, vi sarebbe quello del Klemencic [1]), il quale utilizza il calore prodotto dalle oscillazioni elettriche per produrre correnti termo-elettriche misurabili col galvanometro, e quello del Rutherford [2]), il quale si fonda sulla proprietà che hanno le oscillazioni elettriche di modificare lo stato magnetico di un ago, modificazione che può essere valutata con misure magnetometriche. Quest'ultimi due metodi, sebbene sensibilissimi, si possono adottare in casi speciali, ma non rispondono al mio scopo.

II.

Il Prof. Fleming [3]) descrive succintamente un detector col quale, fondandosi, come il Marconi, sulla smagnetizzazione del ferro per azione delle onde hertziane, e, sostituendo il galva-

1) Klemencic. Wied. Ann. t. 42, p. 417, anno 1891.
2) Rutherford. Proc. Roy. Soc. p. 184, anno 1897.
3) Fleming. Proceedings of the Royal Society, vol. 71, pag. 398, anno 1903.

nometro al telefono, egli ha potuto realizzare un apparecchio adatto per misure quantitative.

Io mi sono servito di quest' ultimo metodo per l' investigazione della trasparenza di alcuni liquidi per le onde elettriche, ed a tal uopo descrivo brevemente il modo come mi sono costruito tale detector e le disposizioni usate per tali misure.

Molte sono state le disposizioni ch' io ho adottato per poter raggiungere la massima sensibilità del detector; descriverò semplicemente l' ultima, la quale mi ha dato buoni risultati.

Attorno un nucleo di nove fili di ferro dolce, ciascuno del diametro di 0,45 di mm. e della lunghezza di 13 cm. circa, previamente ricotti e ben paraffinati in modo da escludere ogni contatto fra di loro, è avvolto uno strato di carta ben paraffinata e su questa una spiralina *a a'* di filo di rame (vedi fig. 2) ricoperto di seta del diametro di mm. 0,2; su questa spiralina è avvolto ancora uno strato di carta paraffinata e su di esso un' altra spiralina *c c'* di filo di rame, ricoperto di seta, del diametro di mm. 0,47.

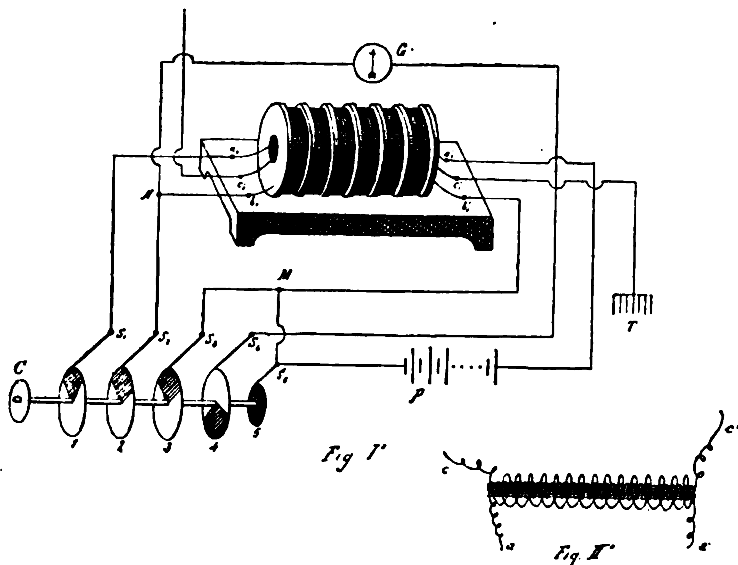
Se si manda una corrente per la spiralina *a a'* si magnetizzerà il nucleo di fili di ferro, e se immediatamente dopo per la seconda spiralina *c c'* arriva un' onda elettrica, questa lo smagnetizzerà.

Di questi piccoli rocchettini ne ho costruiti 14 delle medesime dimensioni, riunendo le spiraline magnetizzanti in serie, e quelle smagnetizzanti in superficie, in modo da presentare i poli Nord da una medesima parte, ed i poli Sud dall' altra; così gli effetti di ciascuno di essi si sommano, e si può avere una discreta corrente dovuta alla diminuzione del magnetismo residuo dei piccoli nuclei di ferro.

Per raccogliere questa corrente ho costruito una spirale di filo di rame, del diametro di mm. 0,15, ben ricoperto di seta, sezionata in sei bobine messe in serie [1]). Questa spirale indotta forma più di 7000 spire, con una resistenza di 9900 ohms circa.

1) Poggendorff, Pogg. Ann. t. 94, p. 289.

Il tutto forma un piccolo rocchetto d' induzione analogo a quello di Ruhmkorff, in cui il fascio di fili di ferro ed il circuito primario vengono sostituiti da 14 piccoli detectors riuniti, come sopra si è detto, in serie, in modo da sommare il loro effetto nella spirale indotta (vedi fig. 1).



A questo rocchetto è unito un commutatore speciale che permette d' inserire la corrente magnetizzante in un dato istante, mentre che le correnti indotte dovute a quest'ultima, sono escluse dal galvanometro; nell' istante successivo è interrotta la corrente magnetizzante, e nello stesso tempo arrivando le onde elettriche smagnetizzano i nuclei di ferro che rimangono debolmente magnetizzati in virtù della ritentività magnetica; le correnti indotte dovute a questa smagnetizzazione sono ricevute da un sensibilissimo galvanometro Desprez-d'Arsonval a specchietto.

Il commutatore è costituito da cinque dischi 1, 2, 3, 4, 5, calettati su di un albero d' acciaio il quale è messo in movimento da un motorino elettrico. La velocità di questo motorino può sorpassare settecento giri a minuto. Il numero dei giri del commutatore si può far variare facendo scorrere la

correggia di trasmissione sopra una puleggia C di diametro minore o maggiore, secondo i casi, a quella del motorino.

I dischi sono fatti di legno di bosso, in ognuno di essi è incassato un settore d'ottone (segnato a trattini nella fig. I), che va a far contatto coll'albero d'acciaio ed occupa un certo arco della circonferenza; solo il disco numero 5 è tutto d'ottone.

Nel n. 1 il settore d'ottone occupa un angolo di 95°.

I dischi 1 e 5 portano due spazzole s_1 ed s_2 e sono collegati alla spiralina a_1 a'_1 ed hanno l'ufficio di magnetizzare, per mezzo della corrente di una batteria d'accumulatori P, i nuclei di ferro. Durante questo tempo, ch'è una frazione del periodo di rotazione dell'albero, i dischi n. 2 e n. 3, in ciascuno dei quali vi è incassato un settore d'ottone di 135° d'apertura per mezzo delle spazzole s_2 ed s_3, mettono in corto circuito la spirale indotta b_1 b'_1; cosicchè le correnti indotte, dovute alla corrente magnetizzante, vengono escluse completamente dal galvanometro G.

Cessata la corrente magnetizzante il galvanometro viene inserito nel circuito della spirale indotta b_1 b'_1 mercè il disco n. 4 (che porta un settore d'ottone di 140°) ed il disco n. 5 per ricevere le correnti indotte dovute alla smagnetizzazione dei nuclei dei fili di ferro per azione delle onde elettriche che arrivano per l'antenna A nella spiralina c_1 c'_1.

Se queste correnti indotte si succedono con una certa rapidità, gli impulsi al galvanometro saranno così frequenti ch'esso darà una deviazione quasi costante, come se fosse dovuta ad una corrente continua.

III.

La massima sensibilità di questo detector dipende dalla scelta dei fili di ferro, e dall'intensità della corrente magnetizzante.

A tal uopo ho incominciato a mandare correnti di magnetizzazione di piccole intensità, osservando al galvanometro le deviazioni relative alla smagnetizzazione, arrivando al massimo di corrente che il filo poteva sostenere. Ho incominciato

con la corrente di 0A,05 e salendo gradatamente fino ad 1 ampère; così ho potuto verificare la sensibilità dell'apparecchio, coll'aumentare della corrente, notando le deviazioni relative alle correnti indotte di smagnetizzazione.

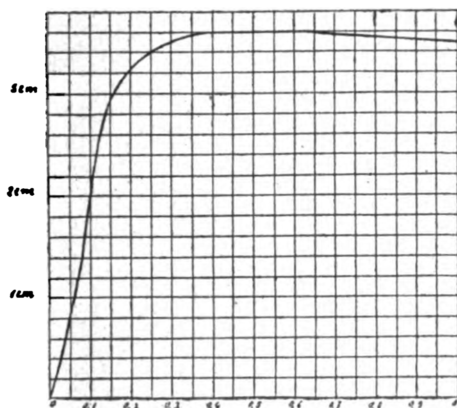
Il generatore delle onde elettriche era costituito da un oscillatore di Lodge, azionato da un rocchetto di lunghezza di 18 cm. L'antenna trasmittente e ricevente era di m. 1,50 circa di lunghezza, avvolta a spira.

Ecco i risultati da me trovati:

Intensità della corrente magnetizzante	Deviaz. al galvanometro in mm.
0	0,0
0,05	8,0
0,1	20,0
0,15	26,5
0,2	30,0
0,25	31,2
0,3	32,4
0,35	32,8
0,4	33,9
0,45	34,0
0,5	34,0
0,55	34,0
0,6	34,0
0,65	34,0
0,7	34,0
0,75	33,9
0,8	33,8
0,85	33,7
0,9	33,6
0,95	33,5
1,00	33,4

Da questo quadro si vede che le correnti indotte dovute alla smagnetizzazione, crescono al crescere della corrente magnetizzante sino a 0,5 ampère, ma a questo limite rimane costante fino a 0,7 ampère: oltre di che decrescono.

Possiamo rappresentare con una curva la sensibilità dello apparecchio, prendendo come ascisse l' intensità della corrente



magnetizzante e come ordinate le deviazioni relative alle correnti indotte dalla smagnetizzazione.

IV.

Accertatomi del buon funzionamento dell' apparecchio sono passato a sperimentare coi sotto notati liquidi, disponendo dentro una cassa di ferro di dimensioni 45 × 45 × 66 cm., l' oscillatore, il rocchetto e due accumulatori. La cassa aveva un coperchio di rame, l' orlo del quale poteva adattarsi in una scanalatura contenente mercurio, in modo da assicurarne la continuità metallica [1]).

Ad una delle faccie laterali di questa cassa era praticata una apertura di 35 × 40 mm., alla quale potevasi addossare una vaschetta di cristallo (di quelle che si usano allo spettroscopio) dello spessore di 6 mm. La vaschetta combaciava benissimo ai bordi con la parete della cassa mercè del mastice a base di piombo (ch' è perfettamente opaco per le onde elettriche), e così mi accertai bene che le onde elettriche gene-

1) A. Righi. Rend. della R. Acc. dei Lincei, anno 1897.

rate dentro la cassa potevano solamente venir fuori attraversando la vaschetta ed il liquido in questa contenuto.

Così ho potuto verificare la trasparenza dei seguenti liquidi:

	Deviazione in mm.
Vaschetta piena d'aria	21
Olio di vasellina.	22
Petrolio.	16
Benzina.	17
Etere.	12
Acido solforico concentrato . . .	0
Acido cloridrico concentrato . .	0
Acido nitrico concentrato. . . .	0
Acqua distillata	7
Sol. di cloruro di Sodio al 0,5 °/₀ .	1,5
» » all' 1 °/₀ .	0
Acqua del mare	0

Da questa tabella si vede che gli acidi assorbono fortemente le onde hertziane; che l'acqua distillata è molto meno trasparente dell'aria, e questa meno dell'olio di vasellina. Inoltre, una soluzione di cloruro di sodio all'1 °/₀, sotto piccolo spessore è opaca, ciò che ci fa desumere che l'acqua del mare, che contiene in soluzione quasi il 3 °/₀ in media di cloruro di sodio, oltre ad altri sali, deve assorbire le radiazioni hertziane anche sotto lieve spessore, come difatti ho potuto esaminare sotto lo spessore di 6 mm.

Dal Laboratorio di Fisica della R. Università di Catania.
Ottobre 1904.

LE SCARICHE OSCILLANTI NEI SISTEMI DI CONDUTTORI COMPLESSI E LA TEORIA ELETTROMAGNETICA DELL' ANALISI SPETTRALE.

Memoria di ANTONIO GARBASSO.

CAPITOLO QUINTO.

Teoria elettromagnetica dell' analisi spettrale.

§ 38. *Modello per le molecole materiali.* — L' osservazione del paragrafo 36, secondo là quale i sistemi di sistemi godono di alcune fra le proprietà più importanti dei sistemi di conduttori, ci permette di costruire un modello per le molecole materiali, lasciando impregiudicato il problema della struttura degli atomi.

E però vogliamo considerare questi ultimi, almeno per ora, come semplici circuiti, e quindi rappresentare le molecole con sistemi di conduttori.

Per il primo teorema del paragrafo 35 dovremo dunque ritenere che lo spettro di un corpo composto risulti sopraponendo gli spettri dei suoi componenti, e deformandoli un poco. Dalla quale osservazione segue subito il perchè delle opinioni discordi, che furono espresse da varii autori su questo argomento.

Se infatti i singoli sistemi componenti hanno dei periodi, che corrispondono a regioni molto diverse nella scala luminosa, sarà facile riconoscere i loro spettri, anche se un poco deformati; ma se le righe dei varii sistemi si alternano, il voler assegnare le onde della molecola complessa al primo o al secondo o ad altro componente è opera vana.

A ragione dunque il Kayser ritiene arbitrarie le conclusioni del Grünwald e del Ciamician, perchè in nessun modo giustificate; il che non toglie che quelle conclusioni qualche cosa di vero possano anche contenere.

Il Grünwald, per esempio, trova che lo spettro del vapore d' acqua si deduce sopraponendo gli spettri dell' idrogeno e

dell' ossigeno, dopo di aver moltiplicati i periodi del primo per $\frac{1}{2}$ e quelli del secondo per $\frac{23}{32}$ o $\frac{5}{8}$. Se la regola fosse destituita di fondamento non avrebbe permesso di calcolare un gran numero di righe nell' ultravioletto, le quali furono poi riscontrate da Liveing e Dewar.

Del resto, un fatto simile a quello, che il Grünwald credette di riconoscere, si verifica nel sistema (estremamente più semplice a vero dire) della figura 3 *d*.

Le formole del paragrafo 29 sono bensì troppo complesse perchè se ne possa vedere chiaro il significato; ma in alcuni casi particolari si prestano ad ogni modo ad una interpretazione semplice. Supponiamo anzitutto che K_1 e K_2 siano assai diversi e che le quantità

$$\varepsilon = \frac{M}{L}, \qquad \alpha_1 = \frac{H}{K_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{H}{K_2}$$

siano piccole, così piccole che si possano già trascurare le potenze superiori alla seconda.

Verrà:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{L}{K_1}}\left[1 - \frac{K_1(\varepsilon - \alpha_1)^2}{2(K_1 - K_2)}\right],$$

e:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\frac{L}{K_2}}\left[1 - \frac{K_2(\varepsilon - \alpha_2)^2}{2(K_2 - K_1)}\right],$$

secondo che si prende davanti alla radice, a denominatore dell' espressione di τ, il segno $+$ o il segno $-$.

Segue dunque senz' altro:

$$T_1^* = 2\pi\sqrt{\frac{L}{K_1}}\left[1 - \frac{K_1(\varepsilon - \alpha_1)^2}{2(K_1 - K_2)}\right],$$

$$T_1^{**} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{K_2}}\left[1 - \frac{K_2(\varepsilon - \alpha_2)^2}{2(K_2 - K_1)}\right],$$

$$T_2^* = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3K_1}}\left[1 - \frac{K_1(\varepsilon - \alpha_1)^2}{2(K_1 - K_2)}\right],$$

$$T_2^{**} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3K_2}}\left[1 - \frac{K_2(\varepsilon - \alpha_2)^2}{2(K_2 - K_1)}\right],$$

Sotto altra forma, se si chiamano $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, $T_1^{(2)}$, $T_2^{(2)}$ i periodi relativi ai due conduttori *isolati* e si pone ancora:

$$\theta_1 = \frac{K_1 (\varepsilon - \alpha_1)^2}{2 (K_1 - K_2)},$$

$$\theta_2 = \frac{K_2 (\varepsilon - \alpha_2)^2}{2 (K_2 - K_1)},$$

risulterà (secondo il paragrafo 6):

$$T_1^{*} = T_1^{(1)} (1 - \theta_1),$$
$$T_1^{**} = T_1^{(2)} (1 - \theta_2),$$
$$T_2^{*} = T_2^{(1)} (1 - \theta_1),$$
$$T_2^{**} = T_2^{(2)} (1 - \theta_2).$$

I periodi del sistema composto si ottengono dunque moltiplicando per certe costanti gli spettri dei conduttori componenti.

Si riconosce poi facilmente che, a parità delle altre circostanze, è tanto più spostato lo spettro del primo conduttore quanto più grande è C_2, ed è tanto più spostato lo spettro del secondo conduttore quanto più grande è C_1.

Questi resultati possono mettersi in relazione col fatto, riconosciuto da Mitscherlich, da Lecoq de Boisbaudran e da altri, che, quando si studiano successivamente i cloruri, bromuri e ioduri di uno stesso metallo, si vedono certi gruppi di righe spostarsi man mano, e sempre nel medesimo senso.

In un ordine di fenomeni più complesso fu trovato, molti anni or sono, dal Bunsen che nello spettro dei composti del didimio certe righe si vanno avvicinando ad un estremo, col crescere del peso molecolare.

Un esempio numerico, e il calcolo effettivo delle lunghezze d'onda corrispondenti ad un sistema del tipo di quello rappresentato nella figura 3 *d*, renderanno anche più chiari i resultati della teoria.

La figura 5 comprende appunto (in *1* e *3*) due conduttori simili a quello del paragrafo 6. In *2* questi conduttori sono riuniti in sistema.

Per calcolare gli spettri corrispondenti ho supposto che i fili fossero lunghi 30 cm. e spessi 0,03; le capacità sono pal-

line di 3 cm. di diametro nel conduttore *1* e palline di 4 cm. nel conduttore *3*.

Nel sistema della figura 2 la distanza fra i fili paralleli è di 10 cm.

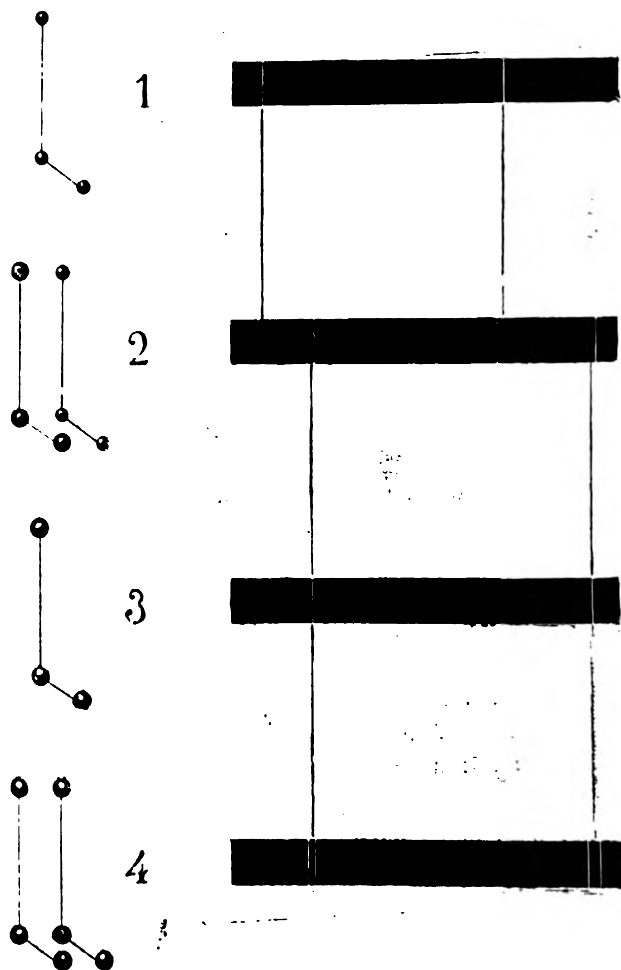


Fig. 5.

Le lunghezze d'onda che si ottengono con questi dati sono le seguenti :

1.		76,9			133,2	
2.	76,1		89,3	131,9		154,7
3.		88,8			153,8	

Conduttori e spettri furono disegnati in vera grandezza e poi fotografati; siccome le lunghezze d'onda variano come le dimensioni lineari dei sistemi che le emettono, la rappresentazione continua a valere.

§ 39. *Variazioni nello spettro.* — L'esistenza degli spettri a colonnati, e le variazioni dovute al riscaldamento e alla pressione si spiegano semplicemente col secondo teorema del paragrafo 35.

Perchè è chiaro in primo luogo che, diventando più complessa la molecola, come è senza dubbio nei liquidi e nei solidi, le singole righe devono essere sostituite da bande; in secondo luogo è evidente del pari che l'influenza mutua delle varie molecole potrà produrre l'allargamento delle righe caratteristiche.

In realtà, quando fosse dato un sistema composto di a sistemi (molecole) uguali, e lo si tenesse da principio distribuito in uno spazio relativamente grande, per poi raccoglierlo man mano in un volume sempre minore, la caratteristica subirebbe essa pure una modificazione progressiva, della quale è facile rendersi conto.

All'origine, essendo piccolissime le azioni induttive fra due elementi del sistema, il secondo polinomio dello sviluppo si potrebbe trascurare rispetto al primo. Questo, che nel caso attuale è la potenza a-esima del primo membro dell'equazione (IV, 5) relativa a ciascun elemento, determinerebbe annullandosi uno spettro, il quale non differisce da quello caratteristico degli elementi isolati.

In seguito, diminuendo le distanze, il secondo polinomio comincerà ad assumere valori, che non sono più del tutto trascurabili; ogni riga dello spettro si scinde adesso in a righe distinte, ma vicinissime. O meglio, in pratica, essendo a [illegible] grande, ogni riga dà luogo ad una banda di larghezza [illegible]

Tali bande poi si andranno allargando sempre [illegible] diminuire dello spazio, in cui il sistema è immerso.

§ 40. *Molecole* [illegible] *.* — *Il teorema* [illegible] grafo 25 se[illegible] c[illegible] *sultato* [illegible]

rienza, secondo il quale corpi chimicamente isomeri hanno spesso degli spettri diversi non solo per la posizione, ma anche per il numero delle righe. Però il disaccordo è più che altro apparente.

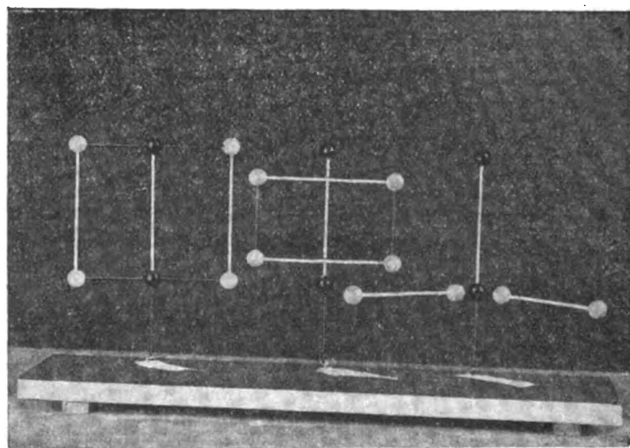
La formola:

$$\Gamma = \sum_{1}^{a} {}_{\alpha} (p_{\alpha} + m_{\alpha}) - a$$

assegna in realtà un valore massimo per il grado della caratteristica; non è escluso che, per una scelta particolare delle costanti, o una disposizione speciale dell'apparecchio, il grado si abbassi o certe radici diventino doppie o multiple.

Mi propongo di verificare la cosa con un esempio particolare, e scelgo all'uopo il sistema, che fu studiato nel paragrafo 34. Se in questo l'ultimo dei tre elementi fosse normale agli altri due (fig. 6 *b*) bisognerebbe annullare tutte le Q (si confronti il paragrafo 33) che contengono l'indice 3 e verrebbe:

$$\begin{vmatrix} S & s & 0 \\ s & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{vmatrix} = S \begin{vmatrix} S & s \\ s & S \end{vmatrix} = 0;$$



a *b* *c*

Fig. 6. — *a*) Sistemi di tre conduttori uguali ad una oscillazione; emette un triplet. *b*) Sistema isomero del precedente; ha uno spettro di tre righe. *c*) Sistema isomero del 5 *a*; ha uno spettro di una sola riga.

il sistema avrebbe dunque, come prima, uno spettro di tre righe, ma sarebbero adesso quelle, che corrispondono ai casi delle figure 1 *a* e 4 *a*.

Le cose si semplificano ancora se supponiamo che i tre conduttori siano disposti in modo che ciascuno risulti in condizioni uguali rispetto agli altri due. È ciò che accade così nell'ordinamento « a cilindro » della figura 7 *a*, come nell'ordinamento « a triangolo » della figura 7 *b*, come nell'ordinamento « a stella » della figura 7 *c*. Qui si può scrivere infatti:

$$Q_{1,2} = Q_{2,1} = Q_{2,3} = Q_{3,2} = Q_{1,3} = Q_{3,1} = D^2 M = s\,,$$

e poi:

$$\begin{vmatrix} S & s & s \\ s & S & s \\ s & s & S \end{vmatrix} = (S - s)^2 (S + 2s) = 0\,,$$

la quale equazione significa che il sistema non emette più tre colori diversi, ma bensì due soli.

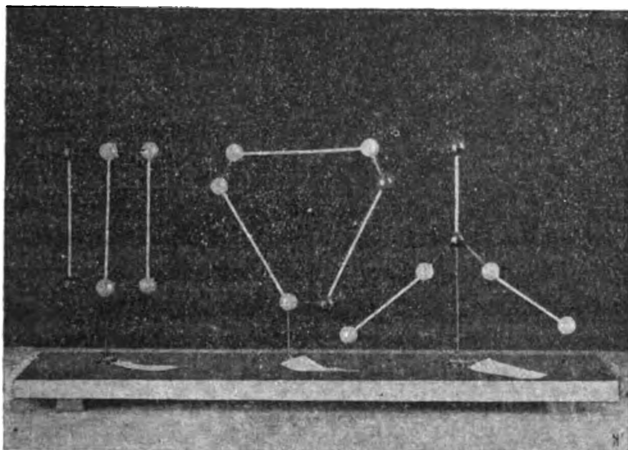


Fig. 7. — *a*) *b*) e *c*) Sistemi isomeri del 6 *a*; hanno spettri di due sole righe.

Finalmente quando si disponessero, come nella figura 6 *c*, i tre conduttori secondo gli spigoli di un triedro trirettangolo, verrebbe:

$$Q_{1,2} = Q_{2,1} = Q_{2,3} = Q_{3,2} = Q_{1,3} = Q_{3,1} = 0\,,$$

e quindi:

$$\begin{vmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{vmatrix} = S^3 = 0 ;$$

la vibrazione dunque si riduce ad una sola componente, quella stessa che è propria dei singoli conduttori isolati.

§ 41. *Modelli possibili per gli atomi materiali.* — Per gli atomi materiali sono possibili, come si avvertiva innanzi, due modelli diversi, i quali, *a priori*, sembrano ugualmente accettabili: possiamo pensare in realtà che il complesso vibrante si riduca ad un circuito unico, o ammettere invece che risulti dalla riunione di parecchi conduttori.

Ora è facile stabilire che, così nell'una come nell'altra ipotesi, la struttura corrispondente ad uno spettro proposto non è mai determinata, e lo è tanto meno quanto più cresce il numero delle righe.

Inoltre la teoria, da sola, è impotente a decidere se il primo o il secondo modello sia da preferirsi.

In questi teoremi sta senza dubbio la ragione intima dell'incapacità dimostrata in tanti casi dall'analisi spettrale.

§ 42. *Numero dei conduttori possibili ad* n *oscillazioni.* — Limitandomi per ora al caso più semplice, che è quello di un circuito unico, mi propongo di far vedere che *se si domanda di costruire un conduttore, capace di emettere uno spettro di* n *righe, vi sono sempre pel problema* n *soluzioni distinte.*

Questo teorema si ottiene con tutta facilità.

Abbiamo veduto al paragrafo 4 che in un conduttore fornito di p capacità e di m fili ogni carica ed ogni corrente soddisfa ad un'equazione differenziale, lineare ed omogenea, a coefficienti costanti, dell'ordine:

$$\gamma = p + m - 1 ;$$



se si vuole che lo spettro della radiazione emessa abbia n righe bisognerà dunque fare:

(*) $$n = \frac{\gamma}{2} = \frac{p + m - 1}{2},$$

e però:

(**) $$p + m = 2k + 1,$$

con k intero.

Ciò posto, si risponde manifestamente al quesito assumendo per p ed m una qualunque fra le coppie registrate nella tabella che segue:

p	m
2	$(2k+1)-2$
3	$(2k+1)-3$
4	$(2k+1)-4$
...	....
r	$(2k+1)-r$

L' ultima coppia si determina con la considerazione che il minimo numero possibile di fili è raggiunto quando la prima capacità si attacca direttamente alla seconda, la seconda alla terza, ecc., la penultima all' ultima.

In questo caso particolare il numero delle capacità supera di uno il numero dei fili; avremo dunque:

$$r = [(2k+1) - r] + 1,$$

vale a dire:

$$k = r - 1.$$

Ma le soluzioni possibili, che si deducono dalla tabella, sono tante quante sono le orizzontali, cioè:

$$r - 1,$$

o, per l' ultimo risultato:

$$k.$$

Osserveremo adesso che confrontando la (*) con la (**) si ottiene:

$$k = \frac{\gamma}{2} = n\,,$$

in perfetto accordo con ciò che si era annunciato.

Realmente vi è un solo conduttore possibile ad una oscillazione (a), ve ne sono due a due oscillazioni (b, c) tre a tre (d, e, f), quattro a quattro (g, h, i, l), cinque a cinque (m, n, o, p, q), sei a sei (r, s, t, u, v, z) e così di seguito [1]).

Per un atomo come è quello del ferro i modelli possibili (*zülassige Bilder* del Hertz) si contano dunque a migliaia.

Anzi l'indeterminazione è anche maggiore di ciò che si potrebbe ritenere a prima vista; in ogni gruppo i conduttori che contengono più di due capacità si possono infatti costruire secondo diversi diagrammi (senza che cambino p ed m).

§ 43. *Numero dei sistemi corrispondenti ad uno spettro assegnato.* — Conforme alla teoria esposta nel quarto capitolo uno spettro di n righe si può ottenere, invece che da un conduttore unico, da un sistema di conduttori, quando si riuniscano insieme degli elementi capaci di emettere:

$$\alpha,\ \beta\ \ldots\ \omega$$

righe, di modo che risulti:

$$\alpha + \beta + \ldots + \omega = n\,.$$

Spettri di due, tre, quattro, cinque e sei righe corrispondono dunque ai sistemi qui appresso registrati [2]).

1) Si veda in proposito un mio lavoro in Mem. R. Acc. di Torino, (2), LIV, 1904.

2) Il metodo, che si presenta più naturale per il calcolo del numero (N) dei sistemi ad n righe, è il seguente:

Si decomporrà il numero n in tutti i modi possibili in termini interi, così da ottenere tante relazioni della forma

$$(^*) \qquad n = \alpha + \beta + \ldots + \quad ;$$

per ciascuna di queste relazioni si farà il prodotto:

$$\nu_\mu = \alpha\,.\,\beta\,\ldots\,\omega\,,$$

e si sommeranno da ultimo le ν, scrivendo:

$$N = \Sigma\nu_\mu\,.$$

2 righe . . (aa);
3 righe . . (aaa), (ab), (ac);
4 righe . . $(aaaa)$, (aab), (aac), (ad), (ae), (af), (bb), $bc)$, (cc);
5 righe . . $(aaaaa)$, $(aaab)$, $(aaac)$, (aad), (aae), (aaf), (ag), (ah), (ai), (al), (abb), (abc), (acc), (bd), (be), (bf), (cd), (ce), (cf);

Bisogna però notare che, per questa via, talune combinazioni si presentano più volte, e la cosa si verifica sempre quando una o più poste al secondo membro di una equazione (*) risultano uguali. L'unità fa eccezione. Il numero n' dei termini spurii si dovrà naturalmente sottrarre dal risultato definitivo; sicchè la formola esatta la dovremo scrivere:

$$N = \Sigma \nu_\mu - n'.$$

Per $n = 2$, ad esempio, si ha il solo svolgimento:

$$n = 1 + 1;$$

viene dunque:

$$\nu = 1,$$

ed:

$$N = 1.$$

Per $n = 3$ si ottiene:

$$\begin{aligned} n &= 1 + 1 + 1, \\ &= 1 + 2, \end{aligned}$$

e di conseguenza:

$$\begin{aligned} &\nu_1 = 1, \\ &\nu_2 = 2, \\ &N = \nu_1 + \nu_2 = 3. \end{aligned}$$

Per $n = 4$ risulta:

$$\begin{aligned} n &= 1 + 1 + 1 + 1, \\ &= 1 + 1 + 2, \\ &= 1 + 3, \\ &= 2 + 2, \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} &\nu_1 = 1, \\ &\nu_2 = 2, \\ &\nu_3 = 3, \\ &\nu_4 = 4, \\ &\Sigma \nu_\mu = 10. \end{aligned}$$

Dall'ultimo termine bisogna però dedurre il numero delle combinazioni di due oggetti a due a due, cioè:

$$\binom{2}{2} = 1 = n';$$

6 righe . . $(aaaaaa)$, $(aaaab)$, $(aaaac)$, $(aaad)$, $(aaae)$, $(aaaf)$, (aag), (aah), (aai), (aal), $(aabb)$, $(aabc)$, $(aacc)$, (am), (an), (ao), (ap), (aq), (abd), (abe), (abf), (acd), (ace), (acf), (bbb), (bbc), (bcc), (ccc), (dd), (ee), (ff), (de), (df), (ef), (bg), (bh), (bi), (bl), (cg), (ch), (ci), (cl).

---

e però si ottiene:

$$N = \sum \nu_\mu - n' = 10 - 1 = 9.$$

Per $n = 5$ verrebbe:

$$\begin{aligned} n &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \\ &= 1 + 1 + 1 + 2, \\ &= 1 + 1 + 3, \\ &= 1 + 4, \\ &= 1 + 2 + 2, \\ &= 2 + 3, \end{aligned}$$

e ancora:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, \\ \nu_2 &= 2, \\ \nu_3 &= 3, \\ \nu_4 &= 4, \\ \nu_5 &= 4, \\ \nu_6 &= 6. \end{aligned}$$

Ma dal quinto termine bisogna nuovamente dedurre $\binom{2}{2}$ cioè uno, e però si ottiene:

$$N = \sum \nu_\mu - n' = 20 - 1 = 19.$$

Per $n = 6$ finalmente bisogna scrivere:

$$\begin{aligned} n &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 2, \\ &= 1 + 1 + 1 + 3, \\ &= 1 + 1 + 4, \\ &= 1 + 1 + 2 + 2, \\ &= 1 + 5, \\ &= 1 + 2 + 3, \\ &= 2 + 2 + 2, \\ &= 2 + 4, \\ &= 3 + 3; \end{aligned}$$

Sicchè, riunendo le soluzioni (indipendenti) trovate per il caso del conduttore unico con quelle che incontriamo ora, si otterrà lo specchietto qui appresso:

Numero delle righe contenute nello spettro	Soluzioni del problema		
	Conduttore unico	Sistema di conduttori	Numero totale
1	1	0	1
2	2	1	3
3	3	3	6
4	4	9	13
5	5	19	24
6	6	42	48

---

risulta di qui:

$$\nu_1 = 1,$$
$$\nu_2 = 2,$$
$$\nu_3 = 3,$$
$$\nu_4 = 4,$$
$$\nu_5 = 4,$$
$$\nu_6 = 5,$$
$$\nu_7 = 6,$$
$$\nu_8 = 8,$$
$$\nu_9 = 8,$$
$$\nu_{10} = 9,$$

Si noti adesso che dal quinto termine bisogna togliere:

$$\binom{2}{2} = 1,$$

dall'ottavo:

$$4\binom{2}{2} = 4,$$

e dal decimo:

$$\binom{3}{2} = 3.$$

Viene dunque:

$$n' = 1 + 4 + 3 = 8,$$

e da ultimo:

$$N = \sum \nu_\mu - n' = 50 - 8 = 42.$$

E però l'indeterminazione cresce, e cresce molto rapidamente, col numero delle righe che si vogliono emesse dal modello.

Riassumendo dunque sembra fatica vana, nella massima parte dei casi, il tentar di stabilire qualche resultato su la possibile struttura di atomi materiali, con *la semplice considerazione* degli spettri corrispondenti.

La cosa è tanto più vera per il fatto che un computo di costanti fa riconoscere subito come il problema rimanga indeterminato, quando anche si assegnino i rapporti delle lunghezze d'onda [1]).

1) Sia dato, per fare un caso semplice, un conduttore come quello del paragrafo 6 e si supponga che in esso i due fili e le tre capacità siano uguali fra loro.

I periodi saranno forniti senz'altro dalle formole:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{LC}\,,$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{3}}\,,$$

essi hanno dunque un rapporto bene determinato.

Malgrado questo lo stesso spettro si può anche ottenere, ad esempio, dal sistema della figura 4 *a*. Supposti uguali fra loro, anche nel caso presente, i fili e le capacità, verrà subito (§ 32):

$$T'_1 = 2\pi \sqrt{\frac{(\lambda + \mu)\gamma}{2}}\,,$$

$$T'_2 = 2\pi \sqrt{\frac{(\lambda - \mu)\gamma}{2}}\,.$$

La congruenza degli spettri si ottiene quando siano soddisfatte le condizioni:

$$2\,LC = (\lambda + \mu)\,\gamma\,,$$

e: (*)

$$\frac{2}{3}\,LC = (\lambda - \mu)\,\gamma\,,$$

dalle quali risulta anzitutto

$$\frac{4}{3}\,LC = \lambda\gamma\,,$$

e:

$$\frac{2}{3}\,LC = \mu\gamma\,,$$

e, dividendo membro a membro.

$$\mu = \frac{\lambda}{2}\,.$$

Portando poi questo valore in una qualunque delle (*) si ricava:

$$\lambda\gamma = \frac{4}{3}\,LC\,.$$

Non solo dunque i vincoli imposti sono accettabili, ma vi è anzi un sistema semplicemente infinito di soluzioni.

§ 44. *Un possibile indirizzo dell' analisi spettrale.* — Una volta dimostrati i teoremi dei paragrafi precedenti, si vede subito quale sia la strada, che conviene battere, quando, da uno spettro osservato, si voglia ricavare qualche indizio su la natura del complesso vibrante.

Bisognerà anzitutto procurare di riconoscere se l' atomo che si considera, comprenda un solo conduttore o invece ne abbia parecchi, e ricercare in seguito la forma dei singoli elementi. Per questa via l' indeterminazione del problema risulta infatti sensibilmente diminuita.

Se, per esempio, lo spettro proposto ha sei righe, e, con qualche artifizio sperimentale, si riesce a stabilire che il sistema emittente contiene due conduttori a tre oscillazioni, la difficoltà di determinare la forma di ciascuno (e quindi dell' intero complesso) diventerà di gran lunga minore, che non sarebbe stata da principio. In luogo di *48* casi possibili ne resteranno infatti *3* soli superstiti per ogni elemento.

§ 45. *Ricerche di Sir N. Lockyer: linee lunghe e linee brevi.* — Indagini nel senso indicato furono condotte già, se pure senza preconcetto teorico, da molti anni e da varii autori.

In primo luogo, per la data e per l' importanza, conviene citare le belle ricerche di Sir N. Lockyer su le *Linee lunghe e brevi* [1]).

Il Lockyer [2]) osservava nelle sue esperienze delle scintille fra elettrodi metallici; e poneva davanti allo spettroscopio una lente, per modo che sopra la fenditura (allargata) si venisse a formare della scintilla una imagine reale.

In queste condizioni [3]) « se i poli sono di due diversi elementi si produrranno tre spettri distinti. Nella parte superiore

1) Sono riassunte, almeno in parte, negli *Studi di analisi spettrale*, dei quali esiste una traduzione italiana (Milano, F.lli Dumolard, 1878).

Prima del Lockyer lo Stokes (" Phil. Trans. ", CLII, 1862), osservando direttamente una scintilla elettrica, con lo spettroscopio privo di fenditura, aveva notato che le righe metalliche si distinguevano da quelle dell'aria, perchè apparivano solo a piccola distanza dalle punte degli elettrodi, mentre le altre attraversavano lo spettro in tutta la larghezza.

2) L. c., Capitolo II, 42 e Capitolo V, 132.

3) L. c., 46.

apparirà una regione ricca del vapore più basso, nella parte inferiore una regione ricca del vapore più alto, ed una frammezzo ricca nè dell' uno, nè dell' altro. Così abbiamo nello spettro come tre strati, almeno: e cioè gli spettri del vapore superiore, del vapore inferiore, e della regione centrale ».

« Si capisce a prima vista, che si produrrà una condizione di cose assai somigliante se invece di una scintilla adopereremo un arco elettrico, nel quale il solo vapore della sostanza resa incandescente occupi tutto l' intervallo fra i due poli. Possiamo proiettare l' imagine di un tale arco *(orizzontale)* sopra una fessura verticale; la quale così ci darà lo spettro di una sezione ad essa perpendicolare..... il vapore, che si trova lontano dal nucleo dell' arco, dà uno spettro assai più semplice di quello, che si trova nel nucleo medesimo. Lo spettro del nucleo consiste di una grande quantità di linee, le quali vanno scemando di numero: finchè quello delle regioni più laterali si riduce ad una linea sola (*sic*) ».

Quelle righe, che appartengono alla radiazione di diverse regioni della scintilla o dell' arco, appariscono naturalmente nello spettro *più lunghe* delle altre, che caratterizzano una sola regione in modo particolare.

Il Lockyer osserva in fine, e la cosa deriva con tutta naturalezza da ciò che precede, che le righe *lunghe* si mostrano più facilmente delle altre e in condizioni assai varie.

Da queste esperienze il nostro autore dedusse subito la verisimiglianza della *dissociazione dei così detti elementi;* ma concluse anche all' impossibilità di stabilire la cosa per via di esperienze.

Cito letteralmente [1]).

« Si può certo ammettere che il calcio una volta formato, sia poi un elemento o no, costituisce un ente distinto; e per conseguenza, se ci limitiamo a sperimentare sopra di esso, non potremo mai decidere, ancorchè, in avvenire, se ne accertasse la dissociazione, se la temperatura produce una forma più semplice, una condizione più atomica della medesima cosa, oppure se la sostanza si decompone effettivamente in X + Y; e ciò perchè, nè X nè Y potranno mai variare di proporzione ».

1) L. c., 182.

Vale la pena di considerare un poco da vicino codesto ragionamento, perchè in realtà, sebbene appaia limpido e piano, esso è in disaccordo con i resultati più semplici e più sicuri della teoria.

Ho stabilito al paragrafo 35 che se si considera un sistema di a conduttori, e le caratteristiche di questi sono date sotto la forma :

$$\mathbf{M}_\alpha = 0 , \qquad (\alpha = 1, 2 \dots a)$$

la caratteristica del sistema complessivo potrà scriversi simbolicamente :

$$\mathbf{M}_1 . \mathbf{M}_2 \dots \mathbf{M}_a + \Sigma\, G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'} = 0 .$$

Se uno dei conduttori, per esempio il conduttore $\mathbf{M}_\alpha$, venisse a separarsi dal sistema, si otterrebbe subito, come nuova caratteristica :

$$\mathbf{M}_\alpha \{\mathbf{M}_1 . \mathbf{M}_2 \dots \mathbf{M}_{\alpha-1} . \mathbf{M}_{\alpha+1} \dots \mathbf{M}_a + \Sigma G_{\mu,\nu,\mu',\nu'}\, M_{\mu,\nu}\, M_{\mu',\nu'}\} = 0,$$

essendo adesso le μ, ν, μ', ν' soggette alla restrizione di non poter mai assumere i valori propri dei fili contenuti nell'α-esimo conduttore.

A parole: per il solo fatto che l' elemento α è uscito dal sistema, *tutte* le righe dello spettro appariranno spostate.

Non è vero dunque che l' esperienza non sia in caso di decidere se il calcio o un altro metallo si dissocia nella scintilla elettrica; anzi le fotografie ottenute dal Lockyer, mostrando le linee (lunghe o brevi) perfettamente diritte, provano con tutta sicurezza che, nelle condizioni delle sue esperienze, la dissociazione *non* è avvenuta.

§ 46. *Ricerche di Sir N. Lockyer: linee basiche.* — Il Lockyer, dalle sue osservazioni su le linee lunghe e le linee brevi, volle dedurre anche un' altra conseguenza, che, quando fosse confermata, avrebbe un' importanza eccezionale.

Se, per esempio, studiando [1]) gli spettri del calcio e dello stronzio incontrava una stessa linea, ma lunga nel primo e breve nel secondo, questa veniva da lui attribuita ad una

1) H. Kayser. Handbuch der Spektroscopie, II, 264, 1902.

impurità (tracce di calcio), almeno nel caso in cui apparissero, con quello dello stronzio, anche le righe più lunghe dello spettro del calcio.

Nel caso opposto restavano due soluzioni possibili. O la riga apparteneva ad un terzo elemento, o era veramente comune al *Ca* e allo *Sr*, derivando da una porzione, che si ritroverebbe in entrambi gli atomi.

Ma la prima ipotesi si poteva scartare facilmente col confronto degli altri spettri, e in particolare di quelli proprii dei corpi più affini.

Per questa via il Lockyer fu condotto a ritenere che esistono veramente nella natura delle righe, caratteristiche di più corpi ad un tempo. E le chiamò *linee basiche*.

Mentre dunque dalle prime ricerche risultava, secondo il fisico inglese, la complessità degli atomi, da queste ultime egli dedusse la prova che in più atomi si può ripresentare il medesimo sistema vibrante.

Le ricerche ulteriori sembrano, ad ogni modo, avere dimostrato che non vi sono linee basiche [1]); e che le coincidenze osservate dal Lockyer erano dovute, in massima parte, alla piccola dispersione dei suoi apparecchi.

Non è il caso dunque di insistere troppo in proposito. Voglio osservare però che se, con mezzi estremamente delicati di ricerca, si potesse stabilire con tutta sicurezza la coincidenza di una o più linee in spettri di diversa origine, questo resultato sarebbe più contrario che favorevole all'ipotesi del Lockyer.

Perchè, quando uno stesso conduttore (per usare il termine della mia teoria) entrasse a far parte di sistemi differenti, le sue righe caratteristiche non potrebbero in nessun modo conservare la loro posizione.

§ 47. *Ricerche di Sir N. Lockyer: dissociazione degli elementi nel sole.* — Di ben maggiore peso si devono ritenere, per il nostro argomento, alcune osservazioni fatte dal Lockyer su gli spettri delle protuberanze [2]).

1) Si veda la bibliografia nel Kayser, l. c., 266.
2) Kayser, l. c., 271.

Dalle quali osservazioni risulta che in codesti spettri, alle volte, certe righe o serie di righe appariscono spostate, mentre altre righe dello stesso metallo rimangono ferme, o, più spesso, si muovono in senso opposto.

La conclusione del Lockyer (accettata anche dal Kayser), che segua di qui la complessità e la dissociazione degli atomi elementari, è in perfetto accordo con la teoria.

Basta infatti riferirsi alla figura 5 e interpretare in essa il sistema (2) come modello di un atomo, per riconoscere immediatamente che la dissociazione, facendo passare dallo spettro (2) ed all' altro spettro (1 + 3), deve produrre delle apparenze simili in tutto a quelle osservate.

§ 48. *Le serie di Kayser e Runge.* — Le osservazioni del Lockyer, di cui ho parlato finora, rispondono in certo modo al primo problema dell' analisi spettrale, da me posto nel paragrafo 44 di questa Memoria; le ricerche di Kayser e Runge [1]) su gli spettri dei corpi semplici contengono, almeno implicitamente, un accenno alla soluzione del secondo problema. Di quello cioè che si riferisce alla struttura dei conduttori elementari dell' atomo.

Kayser e Runge hanno trovato, come è notissimo, che in molti spettri esistono delle serie di righe, definite da una formola del tipo:

$$\text{(A)} \qquad \lambda_n^{-1} = A + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n^4}$$

dove A, B, C sono quantità costanti, e per n si deve porre la successione dei numeri interi a cominciare dal 3.

È naturale di pensare che le righe collegate insieme in un modo tanto semplice derivino da un unico conduttore [2]); e le esperienze di Kayser e Runge indicano anche una strada facile e piana, per sceverare uno dall' altro i diversi elementi costitutivi dell' atomo.

1) Kayser, l. c., 503-578.

2) Se non erro la cosa fu avvertita la prima volta da me in Mem. R. Acc. di Torino, (2), LIII, 1903. Si veda in particolare il § 20.

Gli autori citati osservano infatti a più riprese che talune serie appariscono *invertite* nello spettro, mentre altre non lo sono.

Poichè Kayser e Runge adoperavano come sorgente un arco voltaico, nel quale facevano evaporare i metalli studiati, se ne può dedurre senz' altro che *le diverse serie saranno diversamente distribuite nelle varie regioni dell' arco.*

Una riga infatti apparirà invertita se è emessa in uguale misura dalla parte centrale dell' arco e dal mantello. Sarà brillante se predomina nella prima regione, e manca nella seconda.

§ 49. *Ricerche di F. Lenard su lo spettro dei metalli alcalini nell' arco.* — Nasce da queste risultanze l'opportunità di studiare il comportamento dei metalli nell' arco voltaico; la cosa fu tentata infatti dal Lenard, sebbene in condizioni poco favorevoli, come si vedrà nel seguito, almeno dal punto di vista teorico.

Il Lenard [1]) produceva l' arco fra due carboni, dei quali l' inferiore (positivo), foggiato a coppella, conteneva un sale del metallo in esame. Egli studiò in modo particolare gli spettri del sodio e del litio, e si valse del metodo classico del Lockyer, proiettando, in altri termini, su la fenditura allargata un' imagine reale dell' arco voltaico.

In questo modo ogni linea viene sostituita naturalmente da un' imagine colorata dell' arco, e si può riconoscere subito quali lunghezze d' onda spettino alle diverse regioni.

Nelle esperienze del Lenard il fenomeno luminoso è costituito da due *fiamme*, che si toccano per un punto del loro mantello. La forma caratteristica si svolge quando l' intensità va oltre ai 15 Amp., altrimenti la fiamma di sopra è piccolissima e serrata verso il carbone. In ogni caso le apparenze luminose sono meglio spiegate quanto più grande è la distanza degli elettrodi.

Sperimentando in questo modo si trova che le fiamme corrispondenti alle linee della serie principale (*Hauptserie*)

1) P. Lenard. Ueber den elektrischen Bogen und die Spektren der Metalle " Ann. der Physik " (4), XI, 1903.

sono le più lunghe, poi vengono quelle della prima *Nebenserie*, e da ultimo quelle della seconda.

Le esperienze rendono sempre più probabile la complessità degli atomi per il sodio e per il litio; resta però impregiudicato un problema della massima importanza.

Se in un dato punto dell' arco le linee appartenenti ad una serie speciale vengono a mancare, si possono dare della cosa *due* diverse interpretazioni. Può ritenersi in primo luogo che l' atomo sia dissociato, e che il conduttore corrispondente alle righe di cui si tratta non esista più in quella determinata regione. E si può pensare invece, con uguale diritto (fino a prova contraria), che la minore intensità sia dovuta ad uno scotimento di minore ampiezza, senza che cambi d' altra parte in modo essenziale, la struttura dell' atomo.

Le due ipotesi portano, teoricamente, a conclusioni affatto distinte.

Perchè i periodi caratteristici di un sistema sono determinati con la definizione del sistema medesimo. Il numero e il luogo delle righe nello spettro dipendono, in altre parole, dalle equazioni differenziali o, meglio, dai loro coefficienti.

Invece l' ampiezza dei singoli moti, cioè l' intensità di ciascuna riga, è affare di condizioni iniziali, vale a dire di costanti di integrazione.

Se in un sistema di conduttori un elemento non viene eccitato, certe linee potranno mancare nello spettro, ma quelle che restano non si debbono muovere; se invece l' elemento si allontana, cambieranno le equazioni differenziali, e cambierà di conseguenza ogni periodo.

Ora il metodo sperimentale del Lenard, mentre fornisce, secondo la teoria da me esposta, degli indizii sicuri su l' esistenza dei conduttori costitutivi dell' atomo, non può insegnare nulla sul problema della dissociazione.

Perchè, quando il sistema che si studia fosse decomposto nell' arco, le righe superstiti in un dato punto dovrebbero subire bensì certi spostamenti, e ne verrebbe come conseguenza una deformazione di alcune fra le imagini colorate, che si osservano nello spettroscopio; ma quelle deformazioni,

trattandosi di figure che vanno mutando con molta rapidità, non potrebbero certo constatarsi con sicurezza.

§ 50. *Forme e colori dell' arco voltaico fra elettrodi metallici.* — Io mi sono proposto dunque di riprendere, per altra via, lo studio degli spettri metallici ottenuti con l' arco, tenendo conto nel miglior modo dei resultati teorici.

La strada, che si presenta più naturale, quando si voglia decidere della natura delle radiazioni emesse dai varii punti dell' arco, consiste nel proiettare sopra la fenditura dello spettroscopio un' imagine dell' arco medesimo, spostandola poi successivamente da zona a zona.

Ma, perchè un esame di questo genere riesca possibile, sopra tutto se si vuole del fenomeno ottenere una registrazione fotografica, è necessario che l' arco sia relativamente tranquillo, e durevole, e di forma quasi costante.

L' impiego dei carboni a coppella e dei sali di metalli alcalini non è quindi raccomandabile, almeno per lo scopo nostro.

Del resto, usando i carboni come supporto, si introducono nello spettro delle bande, la cui eliminazione dai risultati finali esige un lavoro lungo e penoso; e d' altra parte il litio ed il sodio non sono nemmeno idonei, come sostanze di prova, per le loro caratteristiche spettrali.

Si sa infatti, dai lavori di Kayser e Runge, che negli spettri dei metalli alcalini la quasi totalità delle righe si può ordinare in serie, secondo la formola (A); ma (come vedremo più innanzi, al § 54 che le serie si possono attribuire a conduttori estremamente semplici.

Ora appare invece ovvio, volendo ottenere dei fenomeni di scissione, di riferirsi a sistemi di circuiti complessi.

Per quest' ultimo motivo, e per eliminare le bande del carbonio, mi sono deciso a studiare degli archi, prodotti direttamente fra elettrodi metallici.

Prima di descrivere le esperienze da me fatte, dirò qualche cosa della forma e dei colori di questi archi, non avendo trovato quasi nulla in proposito, nemmeno nei libri speciali.

Mi sono servito sempre di una vecchia lanterna di Dubosq, sistema Foucault, alla quale avevo tolto il condensatore, so-

stituendolo con un semplice diaframma con foro circolare di due centimetri.

Davanti al foro collocai una lente convergente, che dava sopra uno schermo, posto a forse due metri di distanza, una imagine reale dell' arco, rovesciata e ingrandita quattro o cinque volte.

Queste esperienze che, almeno per alcuni metalli, sono estremamente facili, bast rebbero già per dimostrare, ad esempio nella scuola, le enormi differenze che corrono fra le radiazioni emesse dai diversi tratti dell' arco.

Nella forma che si osserva per solito (*Cu, Fe, Sn, Pb*) [1]) si possono infatti distinguere tre regioni particolari e, quasi sempre, bene limitate.

Vi è in primo luogo il tratto immediatamente vicino agli elettrodi, e che chiamerò nel seguito la *regione polare;* questa è la parte più brillante del fenomeno, e le sue tinte richiamano sempre la estremità più rifrangibile dello spettro.

Le regioni polari sono raccordate dall' *arco* propriamente detto. Il quale è pure assai intensamente luminoso, ma molto ricco, di solito, di onde lunghe.

Finalmente, intorno all' arco è avvolta a cartoccio una fiamma o *coda,* col vertice nell' elettrodo inferiore. Questa emette, per regola, poca luce, di toni freddi, verdognoli o giallastri.

Vi sono però dei corpi, che dànno fenomeni assai diversi da quelli ora descritti.

Il cadmio e lo zinco intanto *non* formano un arco stabile; ma, quando si cerca di staccare gli elettrodi uno dall' altro, si vede partire da ciascuno una fiamma a due tinte, con coda leggerissima.

Le fiamme non sono raccordate, come quelle descritte dal Lenard, ma si tagliano anzi spesso sotto angoli acuti. A questa speciale struttura si deve senza dubbio l' instabilità del fenomeno [2]).

1) Le osservazioni devono essere fatte sopra archi un po' lunghi.

2) Si potrebbe pensare che questa, come più generale, sia, in condizioni opportune, la forma propria di tutti gli archi. Però, anche spingendo la corrente fino a 30 Amp., non mi è riuscito di ottenere nè dal rame nè dal ferro niente di simile.

Merita ancora una menzione il caso dell'alluminio [1]), perchè nel suo arco i rapporti di luminosità fra la coda e le altre regioni risultano invertiti; la coda è invero il tratto più brillante del fenomeno.

Ho esaminato successivamente sette metalli: rame, ferro, alluminio, zinco, cadmio, stagno e piombo, e inoltre dei carboni impregnati (così detti *Effektkohlen*) della marca C. Conradty « *Noris* ». *Niederspannung* [2]).

Raccolgo in breve i resultati ottenuti, avvertendo che la differenza di potenziale fu sempre di 110 Volt (continui).

" Noris ".

Resistenza in circuito	Corrente
5 Ohm	13-15 Amp.

La regione polare è chiarissima, appena volgente al cilestro, l'arco è di un bel violetto; la coda, molto ampia e ricca, ha una tinta arancione. Il fenomeno appare straordinariamente tranquillo, e la lampada regola anche meglio che coi carboni ordinarii; a volte la coda rimane immobile e conserva la sua forma per parecchi minuti.

Rame.

Resistenza in circuito	Corrente
5 Ohm.	11-13 Amp.

La regione polare, assai brillante, ha quella speciale tinta azzurrognola, che si osserva portando un filo di rame umettato di acido nitrico nella fiamma di un becco Bunsen; l'arco invece stacca in un bel colore verde-pistacchio pallido. La coda, leggerissima, instabile, e a volte soffiata orizzontalmente, è rossastra.

Anche per il rame si ha una certa regolarità d'andamento. Ma l'ossido, che ricopre con una crosta nera gli elettrodi,

1) Il metallo da me impiegato conteneva molte impurità, e in particolare del calcio, come dedussi da un'analisi del Sig. Rolla, laureando in Chimica; e verificai con lo spettroscopio.

2) Secondo un'analisi che il Dr. Roncagliolo, primo assistente in questo Istituto di Chimica generale, ebbe la bontà di fare per me, l'anima dei carboni " Noris " contiene quasi esclusivamente del fluoruro di calcio. La cosa è confermata dai risultati spettroscopici (si confronti il § 51).

appena la lampada cessa di funzionare, impedisce molte volte all' arco di ristabilirsi.

Ferro.

Resistenza in circuito	Corrente
5 Ohm.	12-13 Amp.

Bell' arco celeste, con poli appena accennati, più luminosi, ma dello stesso tono. La coda è tranquilla, abbondantissima, di color giallo-cromo carico. La lampada funziona bene solamente se il polo positivo sta in basso; però, invertendo gli uffici degli elettrodi, il fenomeno non cambia di aspetto.

L' arco del ferro è, fra quelli metallici, il più tranquillo, tanto che potrebbe forse trovare qualche applicazione nella pratica.

Alluminio.

Resistenza in circuito	Corrente
5 Ohm.	13-14 Amp.

Arco e poli debolmente luminosi e violacei, bensì i poli volgono alle volte verso il carnicino; coda fissa, brillantissima, color verde-pavone [2]).

L' ossido, che ricopre gli elettrodi, è anche più isolante di quello del rame, e impedisce il funzionamento regolare della lampada.

Ferro, rame e alluminio (e i primi due in particolare) consumano pochissimo.

Zinco.

Resistenza in circuito	Corrente
10 Ohm.	6-10 Amp.

La parte delle fiamme più vicina agli elettrodi è azzurra, la punta è porporina; ma l' aspetto del fenomeno è molto variabile. Da principio, quando gli elettrodi si staccano, il colore azzurro predomina; poi compare il porporino, cominciando dal mezzo. Se la distanza degli elettrodi cresce ancora tutto l'arco si tinge di porpora, e finisce per spegnersi.

2) La straordinaria ricchezza di raggi ultravioletti rende pericoloso per la vista l'arco dell'alluminio. Un mio allievo, che l' osservò a più riprese, senza occhiali, ne ebbe per due giorni una congiuntivite assai molesta.

A momenti compare intorno alle due fiamme un' aureola leggerissima, instabile, di color giallo-limone.

La bacchetta positiva si consuma rapidissimamente.

Cadmio.

Resistenza in circuito	Corrente
10 Ohm.	6-10 Amp.

Il fenomeno è simile in tutti i particolari a quello presentato dallo zinco. Solo le tinte variano, all' azzurro sostituendosi il verde e al porporino un color di mattone. Non vi è traccia d' aureola.

L' arco è anche più instabile che per lo zinco, e il consumo (al polo positivo) è anche maggiore: nelle condizioni delle mie esperienze una bacchetta di un cm. di diametro e di parecchi cm. di lunghezza si svaporava in un mezzo minuto.

La forma caratteristica si osserva particolarmente bene se il polo positivo sta in alto, e il negativo in basso.

Stagno.

Resistenza in circuito	Corrente
10 Ohm.	7-8 Amp.

Anche per lo stagno la regione polare e l' arco mutano spesso di grandezza: le tinte del resto non le differenziano fortemente, passando in modo quasi insensibile da un color malva a un color di lavanda. L' arco è tumultuoso e instabile; la coda, che si svolge ad intervalli, ha un bel tono caldo, fra l' arancio e il rosso-rame.

Il consumo degli elettrodi non è grande.

Piombo.

Resistenza in circuito	Corrente
10 Ohm.	8-12 Amp.

Arco irregolare, instabile, e come per esplosioni successive, non dissimile da quello dello stagno; la coda, più leggera, ha anche una tinta più fredda.

L' elettrodo positivo consuma moltissimo, poco meno che nel caso del cadmio.

Riassumendo le osservazioni che precedono, risulta chiaramente come lo zinco e il cadmio, lo stagno e il piombo non

siano adatti per una ricerca nella quale si richiede una certa stabilità di apparenze. Mi sono dunque limitato nel seguito allo studio del rame, del ferro, dell' alluminio, e dei carboni « *Noris* ».

§ 51. *Spettri emessi dalle varie regioni dell' arco.* — Ho stabilito nel paragrafo 45 che il problema della dissociazione degli atomi si risolve solamente con lo studio delle posizioni caratteristiche per le singole righe; nel paragrafo 49 poi ho fatto vedere che lo spettroscopio, usato col metodo di Lockyer, non può dare in proposito nessun indizio sicuro. Determina invece con molta agevolezza la esistenza e la varia eccitazione dei singoli conduttori.

Prima di accingermi alle ricerche definitive volli quindi esaminare con lo spettroscopio *obbiettivo* gli spettri del rame, del ferro, dell' alluminio e dei carboni « *Noris* ».

Non è necessario per questo impiegare una lente, e proiettare nel piano della fenditura una imagine reale dell' arco; ma si può procedere in un modo più semplice.

La lampada di Dubosq viene disposta nella sua custodia, e si allontanano tutti gli accessorii del portaluce, compreso il tubo destinato a reggere il condensatore; si colloca poi lo spettroscopio [1]) a cinque o sei metri di distanza (sopra un tavolino a piattaforma girevole), e si priva per intero del suo collimatore.

È molto facile, girando un poco la piattaforma del tavolo, disporre l' apparecchio sotto l' incidenza migliore; ogni riga appare in tale caso sostituita da una piccola imagine dell'arco.

In realtà si ritrovano per questa via, e in condizioni particolarmente facili e comode e adatte alle esperienze dimostrative, dei resultati analoghi a quelli del Lockyer e del Lenard.

Ricorderò alcuni esempii in modo speciale.

Per il rame Kayser e Runge hanno stabilito l' esistenza di due serie di righe, corrispondenti alla formola (A), pure lasciando in disparte tutto il resto dello spettro. Si trova che le imagini appartenenti alle serie *sono prive di coda*, mentre tutte le altre ne sono fornite.

1) Era un grande spettrofotometro del Krüss con due prismi.

È caratteristico il comportamento delle tre righe brillantissime verdi: mentre le due di sinistra ($\lambda = 5218$ e $\lambda = 5153$), che costituiscono i secondi termini delle serie ($n = 4$), mancano della coda, la terza ($\lambda = 5106$) è provvista di una coda abbondantissima.

Sono pure senza coda le due righe $\lambda = 4063$ e $\lambda = 4023$, che rappresentano i terzi termini ($n = 5$) nelle serie.

In certi istanti la $\lambda = 5153$ e la $\lambda = 4023$ sembrano però leggermente allargate; sarebbe questo un argomento per ritenere, come risulta del resto da altri indizii, che le due serie *non* sono dovute allo stesso conduttore. Sicchè è più ragionevole parlare, come appunto ho fatto, di *due* serie distinte, piuttosto che di *una serie di coppie*.

Per il ferro non ho potuto ricavare nessun risultato sicuro, il mio spettroscopio avendo una dispersione troppo piccola, perchè le righe tanto fitte di questo metallo fornissero delle imagini abbastanza distinte.

L' alluminio da me impiegato mostra di nuovo alcuni fatti interessanti. Mi accontenterò di ricordare che le righe violette H_1 e H_2, presenti nel suo spettro, hanno una coda amplissima, mentre nessun' altra raggiunge, nemmeno da lontano, le loro dimensioni [1]).

Finalmente i carboni « *Noris* » possono servire anch' essi ad una bella esperienza dimostrativa; appaiono infatti nel loro spettro tre righe violette, a comportamento diverso, la mediana delle quali (è la riga $\lambda = 4226$ del calcio) ha il massimo splendore.

Or bene: mentre la prima, la meno rifrangibile, è ridotta nello spettroscopio obbiettivo a due tratti luminosi, corrispondenti alle regioni polari, e la terza presenta l' intero arco, la linea di mezzo è fornita di una coda abbondante.

Se si proiettano su la fenditura dello spettroscopio, rimesso in condizioni normali, le tre regioni, una dopo l' altra, si osserva, in perfetto accordo con ciò che precede, la presenza costante della linea mediana; quanto alla terza riga essa è

1) L' alluminio di cui disponevo essendosi mostrato assai impuro, non lo impiegai nelle ultime esperienze. Il fatto che riporto nel testo fa vedere come l' esame allo spettroscopio, senza fenditura, riveli immediatamente la presenza di corpi estranei.

visibile nell' arco e presso i poli, mentre la prima si mostra solo nella regione polare.

Ho raccolto su gli spettri or ora descritti una serie di dati interessanti, e mi propongo di pubblicarli in altro luogo. Ora preferisco passare alla descrizione delle esperienze e dei resultati fotografici, che, per lo speciale argomento di questo lavoro, offrono un interesse di gran lunga maggiore.

§ 52. *Posizione delle righe negli spettri delle diverse regioni.* — Per stabilire con esattezza la posizione relativa delle righe, negli spettri delle diverse regioni di un medesimo arco, ho preferito di fotografare direttamente il fenomeno.

Sopra ogni lastra furono prese *due* fotografie nel modo che segue.

Dell' arco si formava un' imagine reale (ingrandita 10 a 15 volte), che veniva a proiettarsi nel piano della doppia fenditura dello spettro-fotometro di Krüss; movendo la lente era facile condurre nella posizione voluta un tratto o l' altro dell' imagine.

Ciò posto si chiudeva una delle fenditure, lasciando l' altra aperta, e, subito davanti a questa, si collocava uno schermo di cartone bianco, con una piccola finestra. La finestra serviva, come si intende, per fissare la posizione dell'imagine.

Fatta una prima fotografia [1]) si chiudeva la fenditura adoperata innanzi, si apriva l' altra, esattamente allo stesso punto, e si spostava del tratto necessario, nel suo piano, lo schermo. Si riconduceva quindi su la finestra l' imagine, nella posizione voluta.

In un mio lavoro, pubblicato nel LIV volume delle *Memorie dell'Accademia di Torino,* ho riprodotto alcune delle prove così ottenute; come regola generale se ne può ricavare che certe righe scompaiono quando si passa successivamente dai poli all' arco e alla coda, *ma le righe superstiti rimangono ferme.*

1) La macchina stava al posto del cannocchiale. Non è necessario avvertire che un diaframma, inserito fra schermo e fenditura, rimaneva abbassato finchè l' imagine non fosse a suo luogo; e si poteva far cadere d' un colpo, quando sopravvenisse qualche incidente a disturbare l' andamento normale dell' esperienza.

Il risultato è simile a quello, che ho dedotto innanzi dalle esperienze del Lockyer su le scintille, e sembra indicare che le temperature, di cui possiamo disporre finora nei nostri laboratorii, non sono sufficienti per la dissociazione degli atomi materiali.

§ 53. *Probabile struttura degli atomi.* — Del resto l'incapacità nostra di scindere il sistema vibrante nelle sue parti costitutive non ci impedisce di riconoscerne l'esistenza e questo è l'essenziale.

Possiamo, ad esempio, essere sicuri che l'atomo del rame risulta dalla riunione di tre conduttori almeno, e conseguenze simili derivano per gli atomi dei metalli alcalini dalle ricerche del Lenard, per il ferro e per il calcio ed altri corpi dalle mie.

Ma possiamo dire anche qualche cosa di più. La formola empirica di Kayser e Runge sembra avere infatti una realtà oggettiva, nel senso che le righe di una serie da essa definita corrisponderebbero ad un elemento speciale e distinto dell'atomo.

Un atomo ci si presenta dunque come un sistema di conduttori di varia struttura; alcuni fra questi di tipo particolarmente semplice e costante producono le serie riscontrate nei diversi spettri metallici.

§ 54. *Ancora le serie di Kayser e Runge.* — Vale la pena senza dubbio di insistere in proposito e di completare per quanto è possibile il modello.

Una questione ci si presenta spontanea: esistono in realtà dei conduttori che danno le serie? e quale è la loro struttura? Purtroppo non mi è riuscito di risolvere il problema da un punto di vista generale, e debbo quindi limitarmi ad alcuni resultati particolarissimi.

Così per esempio si verifica facilmente che il conduttore del paragrafo 7 soddisfa alla formola di Kayser e Runge con due costanti (A e B).

Similmente i conduttori a quattro e cinque oscillazioni del paragrafo 9 soddisfano alla formola completa.

Per il primo di questi i reciproci delle onde sono proporzionali ai numeri:

$$\sqrt{2-\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}=0,62\,,$$

$$\sqrt{2-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}=1,17\,,$$

$$\sqrt{2+\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}=1,62\,,$$

$$\sqrt{2+\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}=1,90\,.$$

Proviamoci dunque a scrivere:

$$0,62=A+\frac{B}{9}+\frac{C}{81}\,,$$

$$1,17=A+\frac{B}{16}+\frac{C}{256}\,,$$

$$1,62=A+\frac{B}{25}+\frac{C}{625}\,.$$

Si calcoleranno così i valori delle costanti A, B e C; portando questi ultimi nella:

$$\lambda_6^{-1}=A+\frac{B}{36}+\frac{C}{1296}$$

risulta:

$$\lambda_6^{-1}=\mathbf{1,91}\,,$$

che è appunto il reciproco della quarta onda.

È un risultato senza dubbio molto curioso, e devo confessare che esso mi ha fornito la prima idea della presente teoria.

§ 55. *Spettri a doublets e triplets.* — L'esistenza degli spettri a *doublets* e *triplets* deriva dal nostro modello in modo semplice e naturale.

La teoria esposta nel paragrafo 31 si può considerare infatti come la descrizione di un atomo, che emette uno spettro a *doublets;* si osserverà anzi una cosa particolarmente interessante e cioè, se i due conduttori che si affacciano danno (quando sono isolati) una serie di Kayser e Runge, il sistema che risulta dalla loro riunione emette due serie.

Nella figura 5, in basso, è rappresentato un caso molto semplice di un sistema con spettro a *doublets.* Si tratta di due conduttori (uguali) a due oscillazioni; propriamente sono due conduttori come quello della figura 5 (3).

Assumendo per le costanti i valori del paragrafo 38 si ottengono le lunghezze d'onda seguenti:

3.		88,8			153,8	
4.	87,8		89,4	152,1		154,8.

A sua volta il teorema del paragrafo 34 ci insegna che la riunione di tre conduttori uguali dà origine ad uno spettro a *triplets.*

§ 56. *Atomi di corpi chimicamente simili.* — I corpi chimicamente affini, quelli cioè che appartengono ad uno stesso gruppo della serie naturale periodica, hanno, come si sa, degli spettri costruiti quasi sempre in modo simile. E poichè la simiglianza della radiazione suppone la simiglianza dei sistemi vibranti, vogliamo domandarci appunto come si debba intendere la cosa. Come, ad esempio, quando si conoscesse la costituzione dell'atomo del litio, se ne potrebbe dedurre la struttura del sodio, o del potassio, o di un altro metallo alcalino qualunque.

Consideriamo all'uopo un sistema di conduttori e supponiamo per un momento che siano trascurabili le azioni elettrostatiche e le resistenze dei fili; supponiamo anche trascurabili i pesi di questi ultimi davanti a quelli delle capacità, per modo che il peso dell'intero sistema si ottenga sommando i pesi delle capacità, che esso contiene.

In queste ipotesi si dimostrano facilmente alcune proposizioni notevoli. E anzitutto: *se le dimensioni lineari di un dato sistema si moltiplicano per un numero k, le lunghezze delle onde emesse dal medesimo sistema riescono moltiplicate anche per k.*

Infatti il determinante, che annullandosi fornisce l'equazione caratteristica del sistema proposto sotto la forma (IV, 5), sarà costituito da elementi, i quali contengono termini di tre sole forme, e cioè:

$$D^2 L, D^2 M \quad e \quad \frac{1}{C}.$$

Ora se le dimensioni lineari del conduttore crescono nel rapporto di *1* a *k* anche i coefficienti di autoinduzione e di induzione mutua e le capacità devono crescere nel medesimo rapporto. I termini, che costituiscono gli elementi del determinante, prenderanno dunque le forme:

$$D^2 k L, \quad D^2 k M \quad e \quad \frac{1}{kC},$$

o anche:

$$D^2 k^2 L, \quad D^2 k^2 M \quad e \quad \frac{1}{C},$$

perchè il significato dell'equazione non muta se la si moltiplica un numero qualunque di volte per il parametro k.

Ciò posto se D_n era una radice dell'equazione primitiva $\frac{D_n}{k}$ sarà certamente una radice della nuova caratteristica, perchè i risultati delle sostituzioni di D_n nell'una e di $\frac{D_n}{k}$ nell'altra coincidono.

Ma le radici come D_n sono inversamente proporzionali alle lunghezze delle onde emesse dal sistema, al quale la caratteristica si riferisce; e però le onde crescono nel rapporto nel quale le radici diminuiscono. Dal che segue la proposizione enunciata.

Se invece *i fili conservano la loro lunghezza e la posizione reciproca, e le capacità crescono nel rapporto di 1*

a k, si riconoscerà con lo stesso procedimento che *le onde devono crescere nel rapporto di 1 a* $\sqrt{k}$.

Ma in quest' ultima ipotesi i pesi risulteranno pur sempre moltiplicati per k^3, e però indicando con P, P', λ_n e λ'_n i pesi dei sistemi e le onde corrispondenti (quelle cioè che derivano da una stessa radice della caratteristica) prima e dopo la trasformazione, avremo senz' altro:

$$\frac{P'}{P} = k^3 \quad \frac{\lambda'_n}{\lambda_n} = \sqrt{k} \,,$$

ed eliminando k^3:

$$\frac{\lambda'_n}{\lambda_n} = \sqrt[6]{\frac{P'}{P}} \,.$$

Se si chiama, per comodità di linguaggio, *famiglia di sistemi* una serie di sistemi che s' ottengono uno dall' altro lasciando inalterati i fili e moltiplicando le dimensioni lineari di ogni capacità per una stessa costante, potremo ritenere, per ciò che si è visto, che *in una famiglia le onde corrispondenti stanno come le radici seste dei pesi.*

Ciò posto, un confronto numerico insegna che *è lecito interpretare gli atomi di un dato gruppo della serie periodica appunto come una famiglia di sistemi*, quando alle onde, che abbiamo chiamato corrispondenti, si sostituiscano le onde omologhe di Kayser e Runge, quelle cioè che derivano da uno stesso valore del parametro n.

La corrispondenza che si stabilisce in questo modo fra i resultati teorici e i resultati sperimentali non è completamente rigorosa: e che non possa esserlo segue già dalla considerazione della formula empirica:

$$\frac{\lambda'_n}{\lambda_n} = \frac{A + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n^4}}{A' + \frac{B'}{n^2} + \frac{C'}{n^4}} \,,$$

secondo la quale il rapporto $\frac{\lambda'_n}{\lambda_n}$ non è sempre il medesimo, ma deve anzi variare di continuo al variare del parametro n,

Se però si prova ad eseguire effettivamente i calcoli si riconosce che, per i valori che si devono attribuire nel caso pratico alle costanti, la variazione è lenta e regolare, e offre un andamento caratteristico.

Noi faremo il confronto prendendo in esame gli spettri del litio e del sodio. Per le costanti di questi corpi Kayser e Runge hanno determinato i valori, che riporto nella tabella seguente [1].

	A	— B	— C
Li	28587	109625	1847
Na	24475	110065	4148

Dai quali valori si ricavano i rapporti di lunghezze d'onda segnati qui appresso:

n	3	4	5	6	7	∞
$\frac{(\lambda_n)_{Na}}{(\lambda_n)_{Li}}$	1,34	1,23	1,21	1,19	1,18	1,17

Avendosi d' altra parte:

$$(P)_{Li} = 7\,,$$

$$(P)_{Na} = 1{,}23\,,$$

risulta anche:

$$\sqrt[6]{\frac{(P)_{Na}}{(P)_{Li}}} = 1{,}22\,.$$

Il rapporto dunque delle lunghezze d' onda relative alle prime righe dei due spettri è notevolmente diverso da quello delle radici seste dei pesi atomici; ma per le coppie succes-

1) Riferisco ora e nel seguito i numeri relativi alla prima serie accessoria (erste Nebenserie), perchè è quella per cui si ha la maggior copia di dati.

sive le cose cambiano, e la deviazione è al massimo del 3 per cento del valore totale.

Se si fa la media dei cinque numeri:

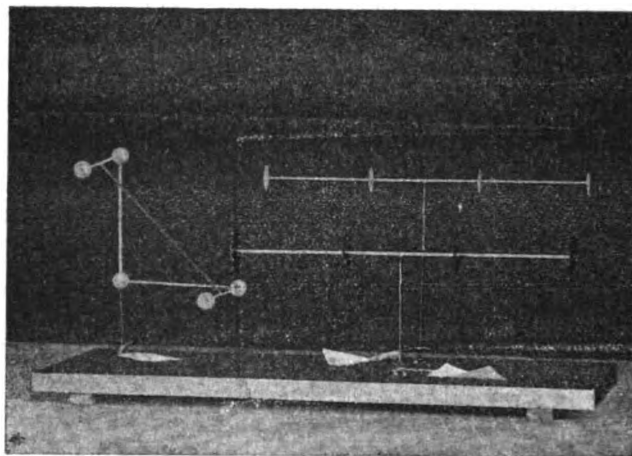
1,34 1,23 1,21 1,19 1,18

si trova:

1,23,

che è vicinissimo al quoziente delle radici seste.

b



a *c*

Fig. 8. — *a*) Conduttore a quattro oscillazioni. *b*) e *c*) Conduttori a tre oscillazioni; i loro pesi stanno come 7 e 23, e le onde corrispondenti come 1 e 1,22, mentre il rapporto delle onde omologhe negli spettri del litio e del sodio è in media di 1 a 1,23.

Una cosa simile si osserva confrontando col litio il potassio, il rubidio ed il cesio. I rapporti delle prime righe si allontanano infatti dal valore teorico, ma, dopo, lo scostamento è sempre assai piccolo. Per la seconda e per la terza coppia si trovano inoltre dei valori prossimi alla media di quelli forniti dalle prime cinque coppie, e prossimi ai rapporti delle radici seste dei pesi atomici.

Riferisco qui sotto i numeri relativi ai confronti delle terze righe ($n = 5$):

$$\frac{(\lambda)_K}{(\lambda)_{Li}} = 1{,}39 \qquad \frac{(\lambda)_{Rb}}{(\lambda)_{Li}} = 1{,}50 \qquad \frac{(\lambda)_{Cs}}{(\lambda)_{Li}} = 1{,}63$$

$$\sqrt[6]{\frac{(P)_K}{(P)_{Li}}} = 1{,}33 \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Rb}}{(P)_{Li}}} = 1{,}52 \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Cs}}{(P)_{Li}}} = 1{,}63$$

Per i metalli non alcalini le cose vanno assai più semplicemente perchè le righe omologhe di due corpi, contenuti nel medesimo gruppo, hanno dei rapporti, che variano ben poco col parametro n.

Anche qui mi accontenterò di riportare alcuni dati, che si calcolano per $n = 5$:

$$\frac{(\lambda)_{Ag}}{(\lambda)_{Cu}} = 1{,}03 \qquad \frac{(\lambda)_{Ca}}{(\lambda)_{Mg}} = 1{,}19 \qquad \frac{(\lambda)_{Sr}}{(\lambda)_{Mg}} = 1{,}33$$

$$\sqrt[6]{\frac{(P)_{Ag}}{(P)_{Cu}}} = 1{,}08 \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Ca}}{(P)_{Mg}}} = 1{,}09 \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Sr}}{(P)_{Mg}}} = 1{,}24$$

$$\frac{(\lambda)_{Cd}}{(\lambda)_{Zn}} = 1{,}06 \qquad \frac{(\lambda)_{Hg}}{(\lambda)_{Zn}} = 1{,}07$$

$$\sqrt[6]{\frac{(P)_{Cd}}{(P)_{Zn}}} = 1{,}15 \qquad \sqrt[6]{\frac{(P)_{Hg}}{(P)_{Zn}}} = 1{,}20$$

Questi numeri bastano, se non mi inganno, per stabilire che la regola delle radici seste ha il valore di un fatto naturale, almeno nei limiti di approssimazione nei quali è vera, ad esempio, la nota legge di Dulong e Petit.

§ 57. *Conclusione.* — I resultati essenziali della presente ricerca si riassumono dicendo che gli atomi *si rappresentano* con sistemi di conduttori complessi; le serie di Kayser e Runge hanno una realtà oggettiva e ciascuna di esse è fornita da un elemento particolare isolato.

Sciogliendo la riserva fatta al paragrafo 38 diremo adesso che le molecole *possono* considerarsi come sistemi di sistemi.

Questo non vuol dire certamente che atomi e molecole

debbano essere formati in natura secondo lo schema da me proposto.

Anzi la teoria si potrebbe rifare, prendendo come punto di partenza l' ipotesi del Lorentz; quelli che io chiamo fili conduttori diventerebbero allora traiettorie di elettroni. Comunque, e qui sta il lato importante della quistione dal punto di vista pratico, la massima parte dei miei resultati continuerebbe sempre a sussistere.

Che se ho scelto il primo modello, in luogo del secondo, la cosa non fu senza buone ragioni. È più facile infatti imaginare e calcolare un conduttore complesso che un sistema di particelle vibranti, e sotto la forma da me stabilita la teoria si presta anche meglio alle verifiche sperimentali. Volendo *realizzare* il moto armonico di un elettrone, bisogna pure ricorrere all' oscillatore del Hertz. Infine, e da un punto di vista strettamente personale, lo studio sul processo luminoso era per me una conseguenza delle ricerche relative all' assorbimento, al colore, alla dispersione e alla rifrazione delle onde elettromagnetiche. Le quali ricerche tutte derivano ora, dai nuovi fenomeni della risonanza ottica, un interesse, che a principio era difficile prevedere.

Mi si permetterà ad ogni modo di insistere su questo che, qualunque debba essere la forma ulteriore della teoria, le proposizioni relative alla complessità degli atomi, al significato delle serie, al meccanismo con il quale si originano gli spettri a *doublets* e *triplets* e le radiazioni dei corpi composti hanno tutta l' apparenza di resultati definitivamente stabiliti.

Genova, Istituto Fisico della R. Università
Luglio 1904.

LIBRI NUOVI

IL RADIO,

di A. RIGHI.

(Vol. 6° delle " Attualità scientifiche ". Bologna, Zanichelli, 1904).

È pubblicata, in questo volumetto di 68 pagine, la conferenza che il Prof. Righi tenne sul radio a Bologna. In essa, con quella competenza e quella chiarezza che gli è propria, l'A., dopo una breve introduzione — nella quale parla dei principali fenomeni della scarica elettrica che hanno relazione col soggetto — espone le proprietà del radio, descrivendo le esperienze eseguite per dimostrarle, e gli apparecchi, da lui immaginati o perfezionati, che si prestano mirabilmente a mettere in evidenza quelle proprietà.

Sono notevoli, fra le altre, le esperienze immaginate per mostrare la deviazione che i raggi β del radio subiscono in un campo magnetico, quelli per mostrare i raggi secondari che si eccitano nell'aria, o sui corpi solidi, che son colpiti dai raggi del radio, e quella con la quale si dimostra l'ionizzazione che il radio produce nell'aria, mediante le ombre elettriche, analoghe a quelle prodotte coi raggi X od ultravioletti.

Tutti i fenomeni osservati son coordinati fra loro mediante opportune considerazioni che l'A. fa per darne la spiegazione, basata sulla teoria degli elettroni. A. S.

I PROBLEMI CHIMICI DEL NUOVO SECOLO,

di G. CIAMICIAN.

(Vol. 2° delle " Attualità scientifiche ". Bologna, Zanichelli, 1903).

Con una sintesi che solo può farsi da chi, come il Professor Ciamician, possiede intera la scienza, sono collegati in questo opuscoletto i fatti e le teorie principali della chimica,

facendo con notevole chiarezza apprezzare il nesso esistente fra le successive scoperte di fatti e di leggi, di cui si è arricchito successivamente questo importantissimo ramo dello scibile, e accennando con felice intuizione ai problemi, che dovranno esser risoluti dal secolo ora incominciato.

Vi è trattata anche la parte industriale, con speciale riguardo agli impianti italiani e ai bisogni che fra di noi ha l'insegnamento della scienza applicata. E una serie di note scientifiche ai punti principali della esposizione, rende questo volumetto ancor più interessante ai cultori della chimica.

A. S.

MAGNETISCHE UNTERSUCHUNGEN,

von E. TAKE.

(Marburg, Univ. Buchdruck., 1904).

Per verificare quale importanza abbiano le obiezioni che furon mosse da C. Braun contro le determinazioni della densità media della terra eseguite a Spandau da F. Richarz e da O. Krigar-Menzel, l'A. ha misurato l'azione che il magnetismo terrestre esercita sui materiali che servirono in quelle esperienze. I resultati ottenuti son pubblicati come tesi di dottorato; e da essi si riconosce che l'influenza del magnetismo è affatto trascurabile. Questo volumetto contiene poi interessanti considerazioni sopra i punti critici della magnetizzazione, e le esperienze eseguite per determinarli nel bronzo d'alluminio e manganese. A. S.

DIE WISSENSCHAFTLICHEN GRUNDLAGEN DER ANALYTISCHE CHEMIE,

von W. OSTWALD.

(4. edizione. Lipsia, Engelmann, 1904).

Di questo libro, che contiene i fondamenti della chimica analitica secondo la teoria degli ioni, è uscita in breve tempo la 4ª edizione; e ciò mostra quanto esso sia stato meritamente apprezzato dagli studiosi. Infatti, nonostante che la teoria della dissociazione elettrolitica e quella della pressione osmotica, che formano la base del metodo esposto in questo libro, siano

nel passato state più o meno contestate, e lo sieno di nuovo, è un fatto che esse servono a collegare fra loro fenomeni disparatissimi, e a dare spiegazioni semplicissime delle reazioni che si presentano nelle analisi chimiche.

Anche questa nuova edizione si divide in due parti: nella prima viene esposta la teoria, e nella seconda sono per sommi capi esposti i metodi pratici di ricerca.

È poi molto interessante l'appendice, che contiene la descrizione delle principali esperienze — quanto mai semplici — che possono illustrare in lezione i fatti precipui della teoria degli ioni. A. S.

KALENDER FÜR ELEKTROCHEMIKER, SOWIE TECHNISCHE CHEMIKER UND PHYSIKER. BEILAGE ZUM KALENDER FÜR ELEKTROCHEMIKER,

von A. NEUBURGER.

(Berlin, Krayn, 1905).

È l'ottava annata di questo manuale, che contiene numerosissimi dati indispensabili non solo per gli elettrochimici, ma anche pei chimici e fisici pratici.

Questo manuale si compone non solo di tabelle numeriche, ma contiene anche descrizioni di apparecchi e di esperienze, norme pratiche di elettrotecnica ecc. che lo rendono ancora più utile come libro di consultazione. A. S.

LEZIONI ELEMENTARI DI ELETTRICITÀ INDUSTRIALE,

per l'Ing. ATTILIO PARAZZOLI.

2. edizione - I volume.
(Editori dell'Elettricista, Roma 1905).

Questa nuova edizione pubblicata a pochi mesi di distanza dalla prima è senza dubbio quanto di più moderno e più completo si possegga oggi in Italia sull'elettrotecnica elementare.

Vari autori italiani e stranieri hanno svolto in trattati magistrali questo ramo importantissimo della fisica tecnica,

ma tali libri non sono accessibili altro che a coloro che possegono una buona coltura in scienze fisiche e matematiche e francamente da noi era realmente sentito il bisogno di un trattato di elettricità esclusivamente industriale che fosse alla portata delle persone di media coltura. A questa mancanza l'A. ha egregiamente riparato pubblicando un volume che per la praticità, non disgiunta dai principi teorici che sono assolutamente indispensabili in ogni buon insegnamento, per la esposizione facile e precisa, non che per la modernità dei concetti, si raccomanda da sè stesso agli Ingegneri che non hanno fatti studi speciali sull'argomento, agli studenti secondari che vogliono acquistare nozioni chiare e complete in materia di applicazioni elettriche, e come ottimo libro di testo per le scuole professionali. E la rapidità con la quale la prima edizione è stata esaurita dimostra meglio di ogni altra cosa come il libro sia stato accolto nel mondo scientifico e scolastico.

In questa prima parte della nuova edizione, riveduta, corretta e ampliata con molta cura, viene svolta la parte teorica generale, mirando però sempre alle applicazioni immediate, mentre che le applicazioni industriali propriamente dette l'A. si riserva di trattarle nel secondo volume.

L'opera conserva il suo primitivo carattere elementare, ma in forme più rigorose che l'avvicina meglio agli studi superiori: tien conto dei più recenti progressi e delle più recenti pubblicazioni ed è completata da brevi, ma spesso interessanti notizie storiche e bibliografiche.

L. C.

TRAITÉ THEORIQUE ET PRATIQUE D'ELECTRICITÉ,

PECHEUX.

Avec notes additionelles de J. Blondin et E. Néculcea.
(Pag. 719, Paris, Ch. Delagrave).

Quest'opera è la riproduzione del corso che l'A. tiene alla Scuola d'arte e mestieri d'Aix e si dirige specialmente agli allievi di queste scuole. Ma parecchie note di carattere teorico inserite nel testo lo raccomandano anche alle scuole superiori.

Fra i suoi pregi sono da enumerare la buona disposizione degli argomenti, la chiarezza dell' esposizione, oltre alla nitidezza dell' edizione e delle figure.

I difetti si limitano alla mancanza di equilibrio o alla superficialità nella trattazione di alcune parti. A. O.

MANUALE PRATICO PER L' OPERAIO ELETTROTECNICO,

per l'Ing. G. MARCHI.

(Hoepli, editore, Milano L. 2,50).

Fra i numerosi manuali esteri ed italiani, dedicati all'operaio elettrotecnico, merita di essere segnalato, ai lettori del *Nuovo Cimento*, questo dell' Ing. Marchi, coi tipi dell' editore Hoepli, che nulla trascura per arricchire sempre più la sua preziosa collezione di manuali scientifici.

Questa pubblicazione deve certamente riuscire gradita nell' operaio in genere e all' operaio elettricista in modo speciale, perchè l'A., presumendo nel lettore soltanto le nozioni elementari di matematica dà una chiara e metodica esposizione dei principii sui quali è fondata l' elettrotecnica e tutte quelle norme pratiche indispensabili nell' esercizio della professione dell' operaio elettricista.

I numerosi esempi numerici che l'A. presenta nei diversi capitoli rendono ancor più facile l' intelligenza delle leggi e delle formule fondamentali. La materia è così distribuita:

Definizioni ed elementi — unità di misura — calcolo delle resistenze — pile — elettrolisi — elettro-magnetismo — suonerie, telefoni, parafulmini — elettrocalamite — strumenti e metodi di misura — macchine dinamo elettriche — motori a corrente continua — accumulatori — correnti alternative — circuiti a corrente alternata — correnti polifasi — alternatori e alterno-motori — trasformatori e convertitori — distribuzione dell' energia elettrica — stazioni centrali — impianti elettrici industriali — correnti ad alta frequenza.

Ritengo che questo manuale sarà ben accolto anche dagli operai, i quali non avendo fatto studi speciali in argomento, desiderano acquistare nozioni chiare in materie di applicazioni elettriche.

Il volume è adorno di 189 nitide figure. L' edizione è ottima. G. C. C.

RIVISTA

Philosopical Magazine. Serie VI, Vol. 8, 1904.

Lord KELVIN. *Piano di una combinazione di atomi che presentino le proprietà del polonio e del radio* (pp. 528-534). — Per polonio si deve qui intendere una sostanza che emetta abbondantemente delle particelle elettrizzate positivamente e poche particelle negative, e per radio una sostanza che emetta invece molte particelle negative e poche positive.

Dalla teoria cinetica dei gas sembra certo che qualunque specie di materia sia dotata di qualche radioattività, e che il polonio e il radio si distinguono dalla materia ordinaria per l'abbondanza straordinariamente grande dell'emissione.

L'A. mostra come, tenendo conto delle attrazioni e repulsioni reciproche secondo la legge newtoniana, si possa immaginare il polonio formato da due atomi ordinari tenuti uniti contro la loro mutua repulsione da un legame rappresentato da un elettrione (cioè da un atomo di elettricità negativa); e il radio formato da due elettrioni tenuti uniti da un atomo ordinario.

Lord KELVIN. *Sull' isolamento elettrico nel vuoto* (pp. 534-538). — Mentre tempo fa si discuteva se il vuoto fosse o no conduttore, è ora accertato che il vuoto più perfetto che noi possiamo ottenere è, come lo spazio interstellare, privo affatto di resistenza al passaggio dell'elettricità. La resistenza apparente del vuoto deve invece ritenersi dovuta alla resistenza che i metalli, il vetro o una sostanza qualunque, oppongono all'estrazione di elettrioni dalla loro massa. Il torrente catodico di particelle elettrizzate negativamente scoperto nel 1871 dal Varley e poi ricoperto dal Crookes, e che era stato ritenuto formato da particelle materiali staccate dal catodo, è invece costituito da elettroni negativi, insieme ai quali possono peraltro esser trasportati atomi metallici o particelle positive.

Da un calcolo approssimato l'A. deduce poi che occorrerebbe una forza elettrostatica di circa 1,280,000 C. G. S. per staccare un elettrione dal catodo. A questa forza corrisponderebbe una trazione di circa 66 tonnellate per cm^2, che sarebbe più che sufficiente a spezzare l'acciaio, la cui tenacità è di circa 20 tonnellate per cm^2. Ma con le più alte differenze di potenziale fin qui usate, che non sorpassano 100000 volta, non sarebbe possibile produrre il distacco dagli elettrioni (e quindi la scarica) nemmeno

se la distanza fra i reofori si portasse, nel vuoto perfetto, a meno di 1 mm. Il torrente catodico del Varley era quindi dovuto alla presenza di aria, poichè il vuoto da lui adoperato era lungi dall' esser perfetto.

Sarebbe interessante poter misurare con precisione qual' è la massima differenza di potenziale che può mantenersi fra due elettrodi nel miglior vuoto che ora si possa ottenere, senza che avvenga la scarica.

Prof. **Trouton** e **Rankine** A. O. *Sulla trazione e torsione di fili di piombo oltre il limite d'elasticità* (pp. 538-556). — Gli A. hanno misurato la velocità con cui decresce la coppia di torsione dopo che è cessata la forza deformatrice, la diminuzione della trazione longitudinale in un filo mantenuto di lunghezza costante, la velocità dell' allungamento sotto una forza costante e quella con cui il filo si accorcia dopo la soppressione della forza.

Jaffé G. *Sulla conduttività dei gas contenuti in piccoli recipienti* (pp. 556-567). — Studiando l' ionizzazione spontanea che si produce nei gas di densità elevata, l'A. ha osservato che essa va soggetta a diverse variazioni, dovute a cause sconosciute, ma che dipendono dalle condizioni locali. Così le variazioni che si presentano nei recipienti piccoli sono maggiori di quelle nei recipienti più grandi e ammontano a circa il 40 $^0/_0$. L' ionizzazione in piccoli recipienti colle pareti di vetro argentato non è strettamente proporzionale alla pressione, a motivo della natura complessa della radiazione dalle pareti. L' ionizzazione del carbonile di nichelio è circa 5,1 volte maggiore di quella dell' aria; e quindi è quasi proporzionale alla densità.

Kayser H. *Nuovi campioni di lunghezze d' onda luminose* (pp. 568-571). — L'A. accenna alle inesattezze che si hanno nelle lunghezze d' onda determinate dal Rowland col metodo delle coincidenze, che in parte son dovute all' avere egli fatto uso promiscuamente di righe dello spettro solare e dell' arco voltaico, e in parte alle irregolarità inevitabili nella divisione dei reticoli. I campioni del Rowland possono essere errati anche fino a 0,03 A; nè è possibile correggerli mediante i pochi valori trovati recentemente da Fabry e Perot. Per fare tale correzione occorre che siano fatte molte nuove misure, da molti osservatori, col metodo interferenziale. E per costituire il nuovo sistema l'A. suggerisce di basarsi sui valori assolutamente esatti determinati dal Michelson per le righe del cadmio.

Morton W. B. e **Vinycomb** T. B. *Sulle vibrazioni delle corde eccitate direttamente e per risonanza* (pp. 573-581). — Seguendo il metodo di Krigar-Menzel gli A. hanno fotografato la curva di

oscillazione di diverse corde, facendo spostare la lastra fotografica di fronte alla corda vibrante, nel cui piano di vibrazione si faceva formare l'immagine reale di una fenditura. Sono confrontati i resultati sperimentali con le curve teoriche di vibrazione, e le differenze possono spiegarsi con la mancanza di omogeneità delle corde e coll'influenza del sostegno. Fra i resultati trovati è notevole che le forme di vibrazione delle corde non dipendono nè dalla qualità o timbro del suono che si ode, nè dalla presenza sullo stesso sostegno di altre corde che risuonino con quella eccitata.

GARRETT C. A. B. *Sulle vibrazioni laterali delle sbarre* (pp. 581-589). — L'A. tratta il problema delle vibrazioni trasversali di una sbarra in un modo più semplice di quello esposto da Lord Rayleigh nella Theory of Sound.

MICHELL A. G. M. *Limiti di economia del materiale nella costruzione delle armature* (pp. 589-597). — L'A. indica quali sono le forme più convenienti delle armature compatibili con la massima economia del materiale.

AICHI K. e TANAKADATE T. *Teoria dell' arcobaleno dovuto a una sorgente circolare di luce* (pp. 598-610). — Dopo aver esposto sommariamente la teoria di Airy, gli A. ricercano le differenze che resultano allorchè alla sorgente puntiforme di luce se ne sostituisce una circolare, e discutono alcuni resultati sperimentali.

EVE A. S. *Confronto dell' ionizzazione prodotta nei gas dai raggi penetranti del Röntgen e da quelli del radio* (pp. 610-618). — Adoperando raggi Röntgen molto penetranti l'A. trova che essi producono un' ionizzazione proporzionale alla densità del gas che attraversano; mentre pei raggi meno penetranti l' ionizzazione cresceva assai più della densità.

Viene così ad esser corroborata l' ipotesi, che i raggi γ del radio non sieno altro che raggi Röntgen.

STRUTT R. J. *Note sulla radioattività di diversi materiali* (pp. 618-619). — Sono comprese in una tabella le osservazioni fatte su 17 varietà di materiali, alcuni dei quali estratti da antiche costruzioni romane, leggermente radioattivi. Più attive sono le acque di Bath, la cui emanazione è più ricca di quella che si ha dall' acqua comune in cui sia sciolta una piccola quantità di radio. Sembra che la quantità di radio contenuta nelle porzioni più profonde della crosta terrestre sia maggiore di quella che si trova alla superficie.

THORNTON W. M. *Sulla magnetizzazione del ferro in massa* (pp. 620-635). — Specialmente per la costruzione delle dinamo e degli alternatori sarebbe di grande importanza determinare le co-

stanti magnetiche del ferro direttamente su tutta la massa dei pezzi che vengono adoperati, e non sopra piccoli campioni da essi prelevati, e studiati coi soliti metodi balistici o magnetometrici. L'A., avendo avuto occasione di costatare, con un millivoltmetro registratore incluso in un circuito avvolto sul nucleo di una dinamo, le lenti variazioni magnetiche che si presentano nell' atto in cui si stabilisce e si annulla la corrente eccitatrice, propone un metodo per ottenere direttamente la permeabilità magnetica e l'isteresi del ferro, operando su tutta la massa che forma il nucleo dell' indotto o dell' induttore delle dinamo.

Basta, per ciò, avvolgere sul nucleo un rocchetto esploratore; e se n è il numero delle spire, a la sezione del nucleo, e la forza elettromotrice media indotta nel tempo T durante il quale avviene la variazione del magnetismo provocata dallo stabilirsi o dal cessare della corrente magnetizzante, la variazione nella densità del flusso magnetico sarà

$$B = \frac{eT}{na}.$$

Confrontando i resultati ottenuti con un nucleo massiccio d'acciaio e con un altro di ferro laminato, l'A. osservò che la corrente magnetizzante da prima cresce più rapidamente col nucleo massiccio che con quello laminato; effetto preveduto da Heaviside, ma non mai costatato prima d' ora, e dovuto all' azione di schermaglio che fanno le correnti parassite, per cui l' azione magnetizzante della corrente non raggiunge immediatamente la porzione centrale del nucleo.

Quando l' onda magnetizzante comincia ad invadere il nucleo, si ha un aumento nella densità del flusso negli strati estremi col crescere della corrente e un aumento nell' area magnetizzata; e da ciò resulta un aumento apparente nella permeabilità del ferro. Il punto in cui questa comincia a diminuire subitamente indica la cessazione delle correnti nel nucleo. In un caso studiato dall'A. ciò avveniva in 0,3 secondi, e quindi la velocità della propagazione entro il nucleo si deduceva uguale a circa 3,3 pollici al secondo.

La nota termina con l' analisi di un caso trattato da Heaviside; e viene mostrato come la curva sperimentale differisce da quella teorica. Il cambiamento di curvatura che si osserva nella curva sperimentale accenna ad un subitaneo aumento nel numero dei magneti elementari che vengono allineati.

Rutherford E. *Prodotti della lenta trasformazione del radio* (pp. 636-650). — Oltre le trasformazioni che erano state osservate

nel radio, e di cui già aveva fatto cenno (Bakerian Lecture, R. Soc. London 1904) l'A. ha osservato altre due trasformazioni assai lenti, di cui rende conto in questa Nota. Sembra che quei nuovi prodotti sieno dovuti ad una decomposizione dell' emanazione del radio, diversi dai primi tre prodotti già studiati. E cioè dal radio si ha l' emanazione, che dà origine a radio A, questo produce radio B, da cui si ha radio C, che presentano tutti e tre cangiamenti assai rapidi della loro attività. Dal radio C si ottengono poi i due nuovi prodotti di cui ora tratta l'A., e che egli chiama radio D e radio E, e nei quali l' attività decresce molto lentamente.

É probabile che il radio D sia contenuto nella pechblenda, e sarebbe molto interessante poterlo isolare, perchè scientificamente sarebbe più utile del radio stesso. La sua attività, misurata coi raggi β, dovrebbe essere circa 25 volte maggiore di quella del radio, e il cangiamento della sua attività dovrebbe esser così lento, da potersi trascurare in molti esperimenti.

WALKER G. W. *Sulle correnti di saturazione nell' ionizzazione* (pp. 650-659). — L'A. integra, in un caso particolare accessibile al calcolo, le equazioni generali relative alla corrente che si stabilisce fra due lastre piane indefinite mantenute a potenziali diversi, e ne deduce le condizioni in cui la corrente di saturazione può esser raggiunta.

A. STEFANINI.

ERRATA CORRIGE

Nel fascicolo di Luglio 1904 all' articolo del sig. M. IKLÈ " Sullo spettro d'assorbimento ultrarosso ecc. „ sono incorsi due errori.

Pag. 43, riga 13, *deve leggersi* cloroformio $CHCl_3$ *invece di* CCl_4
e riga 14, 2° joduro di metile CH_3J *invece di* metilene

PIETRO SALVIONI, *gerente responsabile.*

DILATAZIONE E COMPRESSIBILITÀ DELLE MISCELE.

Ricerche sperimentali del Dott. PROCIDA CARNAZZI [1]).

Diversi lavori furono eseguiti sulla compressibilità e dilatazione delle miscele, quali quelli di A. Duprè e M. Page [2]) [3]), di A. Duprè [4]), di Drecker [5]), di Pagliani e Palazzo [6]), di Pagliani [7]) ed in tutti si venne alla conclusione che tanto per la dilatazione, quanto per la compressibilità i coefficienti non obbediscono alla legge addittiva.

La maggior parte degli sperimentatori da me citati però si occupano solo delle miscele di alcool etilico ed acqua e tutti eseguirono le loro esperienze fra limiti pochissimo estesi di pressione.

E siccome il modo di comportarsi rispetto alle diverse condizioni fisiche è intimamente legato con la costituzione della miscela, così mi parve non del tutto inutile esaminare che cosa avviene a pressioni più elevate.

Nella presente nota pertanto espongo i risultati da me ottenuti dopo varie serie di esperienze eseguite allo scopo di determinare il coefficiente di dilatazione fra 10° e 50° e quello di compressibilità fra 1^{atm} e 1000^{atm} di miscele, prese in varie proporzioni, di alcool amilico ed acetone, come pure di alcool amilico e benzolo.

I liquidi da me usati erano puri come venne riscontrato coi processi noti dal Dott. Guido Bargellini, aiuto alla cattedra

1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica della R. Università di Siena, diretto dal Prof. S. Lussana.
2) Philosophical Transaction, 1869, p. 591.
3) Procedings of the Royal Society, V. 17, p. 333-337.
4) Procedings of the Royal Society, V. 20, p. 336, an. 1872.
5) Wiedemann Ann. (N. F.), V. 20, p. 870, an. 1883.
6) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, V. 19, p. 1017, an. 1884.
7) Rend. R. Accademia dei Lincei, an. 1889, p. 777-785.

di Chimica nella R. Università di Siena, al quale porgo qui i miei ringraziamenti.

Coefficiente di dilatazione. — Il metodo da me usato è il dilatometrico.

Ebbi occasione di adoperare due dilatometri; quello usato per la maggior parte delle miscele aveva un bulbo della capacità di $7^{cm^3},5849$ mentre la sezione del cannello era di $0^{cm^2},0707$; il bulbo dell'altro aveva la capacità di $12^{cm^3},8842$ ed il cannello la medesima sezione del primo; il coefficiente di dilatazione del vetro lo trovai uguale a 322.10^{-7}.

Per ogni coppia di liquidi preparai, di mano in mano che dovevano essere studiati, diverse concentrazioni che conservai poi sempre in vasetti chiusi da tappi smerigliati.

Dopo pesata la miscela, che riempiva il dilatometro fino ad un certo punto del cannello, terminavo di riempirlo con mercurio e lo capovolgevo immergendone l'estremità libera in una bacinella contenente mercurio e ciò per impedire che la concentrazione della miscela si alterasse oppure che ne diminuisse la sua quantità. Mettevo poi il tutto dentro un grande bagno ad acqua su due faccie opposte del quale avevo praticato due finestre rettangolari chiuse con lastre di vetro di lunghezza sufficiente per potere seguire le variazioni di volume della miscela dovute alla variazione della temperatura. L'acqua del bagno era continuamente rimescolata e la sua temperatura veniva data da un termometro campione del Baudin, diviso in decimi di grado, mentre un'altro termometro il cui bulbo si trovava aderente al cannello del primo, in opportuna posizione, mi dava modo di calcolare la correzione della colonna sporgente.

Tutte le letture sia dei termometri, come della posizione nel cannello della superficie di separazione fra la miscela ed il mercurio venivano eseguite con cannocchiali opportunamente disposti, e precisamente in modo da rinchiudere fra due letture delle temperature, di cui facevo poi la media, una lettura sul cannello del dilatometro. Prima di eseguire un'osservazione lasciavo sempre trascorrere almeno un quarto d'ora dopo che il bagno aveva raggiunto e manteneva costante la temperatura desiderata.

È pressochè inutile aggiungere che ho studiato i termometri da me usati determinandone replicatamente lo zero.

Le osservazioni le feci per intervalli di un grado o due e calcolai poi i volumi del liquido nel modo solito non avendo ritenuto necessario introdurre alcuna correzione per la depressione variabile a cui il liquido era soggetto misurata dalla colonnina di mercurio che stava al di sopra della bacinella e che non superò mai i 10 cm. di mercurio; dai volumi così ottenuti ne dedussi con un' interpolazione grafica i volumi delle miscele di cinque in cinque gradi col mezzo dei quali calcolai il coefficiente di dilatazione riferito alla temperatura iniziale che fu di 20° per le miscele benzolo, alcool amilico, e di 10° per quelle di acetone, alcool amilico.

Nelle seguenti tavole do i risultati ottenuti; nella prima colonna ho segnato il valore della temperatura t, nella seconda i coefficienti di dilatazione moltiplicati per 10^6, nella terza il valore che questo coefficiente avrebbe se fosse valida la legge additiva e calcolata secondo la formola

$$\alpha = \frac{v_1 \alpha_1 + v_2 \alpha_2}{v_1 + v_2} \qquad (1)$$

dove α_1 e v_1, α_2 e v_2 sono rispettivamente i coefficienti di dilatazione dei componenti ed i volumi che di essi furono presi per formare la miscela; infine nella quarta colonna si trova la differenza fra i valori di α osservati e calcolati.

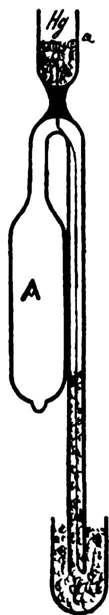
Coefficienti di dilatazione della miscela acetone-alcool amilico.

	Acetone	Acetone gr. 93,65 Alcool am. „ 6,35			Acetone gr. 87,61 Alcool am. „ 12,39			Acetone gr. 51,64 Alcool am. „ 48,36			Acetone gr. 19,38 Alcool am. „ 80,62			Acetone gr. 5,52 Alcool am. „ 94,48			Alcool am.
t	$10^6 \cdot \alpha$ oss.	$10^6 \cdot \alpha$ oss.	$10^6 \cdot \alpha$ calc.	δ	$10^6 \cdot \alpha$ oss.	$10^6 \cdot \alpha$ calc.	δ	$10^6 \cdot \alpha$ oss.	$10^6 \cdot \alpha$ calc.	δ	$10^6 \cdot \alpha$ oss.	$10^6 \cdot \alpha$ calc.	δ	$10^6 \cdot \alpha$ oss.	$10^6 \cdot \alpha$ calc.	δ	$10^6 \cdot \alpha$ oss.
15	1323	1304	1293	—11	1287	1275	—12	1191	1115	—76	1032	990	—42	939	931	— 8	909
20	1340	1319	1313	— 6	1304	1293	—11	1194	1137	—57	1035	999	—36	950	943	— 7	917
25	1355	1332	1329	— 3	1315	1306	— 9	1207	1151	—56	1037	1010	—27	960	950	—10	924
30	1370	1352	1344	— 8	1325	1317	— 8	1218	1158	—60	1045	1016	—29	966	955	—11	928
35	1378	1367	1353	—14	1334	1326	— 8	1229	1167	—62	1052	1023	—29	972	962	—10	936
40	1398	1376	1371	— 5	1352	1344	— 8	1239	1182	—57	1063	1032	—31	976	968	— 8	942
45	1418	1392	1391	— 1	1372	1363	— 9	1250	1199	—51	1072	1048	—24	991	983	— 8	950
50	1440	1413	1410	— 3	1305	1383	—12	1264	1215	—49	1082	1061	—21	999	995	— 4	961

Coefficienti di dilatazione della miscela benzolo-alcool amilico.

	Benzolo	Benzolo gr. 94,32 Alcool am. „ 5,68			Benzolo gr. 88,12 Alcool am. „ 11,88			Benzolo gr. 74,49 Alcool am. „ 25,51			Benzolo gr. 46,52 Alc. am. „ 53,48			Benzolo gr. 17,82 Alc. am. „ 82,18			Benzolo gr. 6,52 Alc. am. „ 93,48			Alcool am.
t	$10^6 . \alpha$ oss.	$10^6 . \alpha$ oss.	$10^6 . \alpha$ calc.	δ	$10^6 . \alpha$ oss.	$10^6 . \alpha$ calc.	δ	$10^6 . \alpha$ oss.	$10^6 . \alpha$ calc.	δ	$10^6 . \alpha$ oss.	$10^6 . \alpha$ calc.	δ	$10^6 . \alpha$ oss.	$10^6 . \alpha$ calc.	δ	$10^6 . \alpha$ oss.	$10^6 . \alpha$ calc.	δ	$10^6 . \alpha$ oss.
25	1214	1205	1191	—14	1198	1173	—25	1150	1132	—27	1088	1051	—37	976	970	— 6	941	940	— 1	923
30	1230	1216	1211	— 5	1204	1191	—13	1178	1149	—29	1100	1064	—36	998	983	—15	954	952	— 2	931
35	1243	1224	1216	— 8	1215	1199	—16	1184	1159	—25	1115	1074	—41	1014	990	—24	958	957	— 1	941
40	1255	1238	1238	— 0	1226	1219	—17	1197	1173	—24	1125	1086	—39	1020	1000	—20	971	963	— 8	946
45	1258	1247	1242	— 5	1240	1227	—13	1204	1179	—25	1129	1091	—38	1024	1005	—19	982	975	— 7	956
50	1285	1273	1271	— 2	1253	1245	— 8	1213	1203	—10	1145	1110	—35	1039	1021	—18	997	983	—14	967

Dai numeri dati nelle tavole precedenti si deduce che il coefficiente di dilatazione delle miscele, come per i liquidi semplici, aumenta coll'aumentare della temperatura: di più se al componente che ha il coefficiente di dilatazione maggiore si aggiungono quantità di più in più grandi dell'altro componente, il coefficiente va gradatamente diminuendo, ma non segue però la legge addittiva; esso si mantiene sempre più alto di quello che si ottiene dalla (1), carattere questo che si accentua maggiormente quando i componenti entrano in parti uguali a formare la miscela. Che se si osservano le colonne delle differenze si scorge che mentre per le miscele di acetone-alcool amilico i valori di δ vanno sempre diminuendo coll'aumentare della temperatura, in quelle di benzolo-alcool amilico diminuiscono col crescere della temperatura quando predomina il benzolo, crescono al contrario se predomina l'alcool amilico e rimangono costanti quando si avvicinano all'uguaglianza le quantità rispettive dei due componenti.



Compressibilità delle miscele. — Tralascio di parlare del modo di produrre e di misurare la pressione, perchè è il solito da me adoperato nella determinazione del coefficiente di compressibilità del mercurio [1]. Mi limiterò qui a notare che il dilatometro contenente la miscela in esame ha la forma di un tubo U, come si vede nella figura qui unita; la branca A, che costituisce il bulbo ha un diametro interno di circa 1 cm., ed è lungo 7 cm. circa, è affilata e chiusa ad un'estremità ed all'altra comunica colla seconda branca costituita d'un cannello di 2 mm. di diametro interno e lungo circa 25 cm. Un filino di platino di $0^{mm},03$ di diametro è teso nell'interno del cannello in maniera che una delle sue estremità sporge dal fondo del bicchierino *a* e l'altra è saldata all'estremità opposta del can-

1) Nuovo Cimento, S. 5, V. 5, an. 1903, p. 180.

nello. Determinata la capacità del bulbo e calibrato il cannello nel modo già indicato a pag. 182 del lavoro sopra citato [1]) lo riempivo colla miscela di cui ne determinavo il peso e completavo il riempimento con mercurio, mettevo il tutto nel solito blocco laboratorio comunicante con la pompa ed il manometro.

Siccome la temperatura della miscela variava notevolmente col variare della pressione così credetti prudente determinare ogni volta la vera temperatura nell' interno del blocco e perciò v' introdussi una saldatura d' una pinzetta termoelettrica formata da un tubo di rame e da un filo di argentana elettricamente isolato che lo attraversava; un' estremità del filo era saldata all' estremo del tubo di rame otturandolo e formava la saldatura della pinzetta posta entro il blocco vicinissimo al bulbo dilatometrico e l' altra sporgeva dal tubo ed era saldata ad una striscia di rame di natura uguale a quello che costituiva il tubo, formando così la seconda saldatura che tenevo immersa in un recipiente pieno di petrolio unitamente al bulbo d' un termometro. La pinzetta era posta in circuito con un galvanometro Magnus e la sua sensibilità era tale che l'ago deviava in media 8,7 divisioni della scala per ogni grado di differenza fra le temperature delle saldature; siccome col cannocchiale potevo leggere benissimo anche i decimi di divisione così mi era possibile apprezzare con sicurezza i cinque centesimi di grado nella differenza fra le temperature delle due saldature. Per essere però più sicuro non faceva mai le letture subito dopo avere variata la pressione, ma aspettavo almeno un quarto d' ora, dopodichè ritenni che la temperatura nell' interno del blocco fosse uniforme. La pinzetta era elettricamente isolata dal blocco mediante un cono di ebanite, il quale chiudeva un foro appositamente praticato nel coperchio, mentre il conduttore che pescava nel bicchierino *a* del dilatometro era isolato da un altro cono di ebanite che chiudeva un foro laterale praticato nel blocco.

Dopo aumentata la pressione aspettavo, come dissi sopra, che l' equilibrio di temperatura fosse ristabilito, e facevo quindi

1) Nuovo Cimento, S. 5, V. 5, an. 1903, p. 180.

le mie letture che consistevano nella misura delle resistenze dei fili del dilatometro e del manometro, nella misura della differenza di temperatura fra l'esterno e l'interno del blocco data dalla pinzetta e nella lettura di due termometri, uno dei quali si trovava nel bagno contenente la saldatura esterna della pinzetta e l'altro in vicinanza del blocco contenente il manometro e da questi dati con processo identico a quello che già descrissi nel mio precedente lavoro sopra citato deducevo il volume occupato dalla miscela ad una data temperatura e pressione. Questi volumi così trovati si riferiscono alla temperatura ambiente che durante le diverse serie di osservazioni relative ad una stessa concentrazione oscillò tutto al più di 2°. Per ridurli alla stessa temperatura onde renderli fra loro paragonabili, feci uso dei coefficienti di dilatazione precedentemente trovati alla pressione atmosferica ritenendo che, data la piccolezza della correzione riuscisse insensibile la variazione che questo coefficiente può avere col variare della pressione.

Coi volumi così calcolati costruii le isoterme e da esse dedussi i volumi di 50 in 50 atmosfere, che mi servirono a calcolare il coefficiente di compressibilità espresso dalla formola:

$$\beta = \frac{v_1 - v_p}{v_1 (p - 1)} .$$

Questi coefficienti sono quelli che do nelle seguenti tavole, dove nella prima colonna sono segnate le pressioni, nella seconda i coefficienti di compressibilità β, fra un'atmosfera e le pressioni segnate nella prima colonna, moltiplicati per 10^6, nella terza i valori dello stesso coefficiente β_1 ridotto alla temperatura di 25°, nella quarta il valore di β_1 calcolato in base alla legge additiva secondo la formola:

$$\beta_1 = \frac{v_1 \beta' + v_2 \beta''}{v_1 + v_2}$$

dove β' e v_1, β'' e v_2 sono rispettivamente i coefficienti di compressibilità ed i volumi dei componenti la miscela, ed infine nella quinta le differenze fra i valori così calcolati e quelli

osservati. In testa alle singole tavole sta segnata la quantità in peso di ciascun componente che entra a formare la miscela ed in testa alle colonne β oss. si trova indicata la temperatura d' osservazione.

Infine aggiungerò che per calcolare i valori di β_1 dedussi dalle osservazioni dell' Amagat fatte fra circa 8 atm. e 37 atm. e fra le temperature di circa 15° e 100°, per i liquidi semplici, il coefficiente medio di variazione di β con la temperatura e supposi che rimanesse invariato per pressioni superiori, non solo ma anche che si potesse usare per temperature vicino ai 15°. L' ipotesi fatta non è certamente giusta, ma per lo scopo mio mi sembrò più che sufficiente.

In quanto alle miscele poi mi calcolai questo coefficiente di variazione con la temperatura secondo la formola

$$x = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2}{p_1 + p_2}$$

dove x, x_1 ed x_2 sono questi coefficienti di variazione rispettivamente delle miscele e dei componenti, p_1 e p_2 i pesi dei componenti che entrano a formare la miscela.

Coefficienti di compressibilità della miscela acetone-alcool amilico.

Pressione in atm.	Acetone		Acetone gr. 95,5 Alcool am. „ 4,5				Acetone gr. 83,01 Alcool am. „ 16,99				Acetone gr. 50,98 Alcool am. „ 49,07				Acetone gr. 16,95 Alcool am. „ 83,05				Acetone gr. 4,91 Alcool am. „ 95,09				Alcool am.	
	$t=16°$	$t=25°$	$t=22°$	$t=25°$			$t=23°,5$	$t=25°$			$t=24°,5$	$t=25°$			$t=26°,5$	$t=25°$			$t=24°,6$	$t=25°$			$t=25°$	$t=25°$
	$10^6.\beta$ oss.	$10^6.\beta_1$	$10^6.\beta$ oss.	$10^6.\beta_1$	$10^6.\beta_1$calc.	δ_1	$10^6.\beta$ oss.	$10^6.\beta_1$	$10^6.\beta_1$calc.	δ_1	$10^6.\beta$ oss.	$10^6.\beta_1$	$10^6.\beta_1$calc.	δ_1	$10^6.\beta$ oss.	$10^6.\beta_1$	$10^6.\beta_1$calc.	δ_1	$10^6.\beta$ oss.	$10^6.\beta_1$	$10^6.\beta_1$calc.	δ_1	$10^6.\beta$ oss.	$10^6.\beta_1$
50	115	133	114	120	131	+11	100	103	125	+22	96	97	111	+14	94	93	95	+2	90	90	90	0	87	87
100	110		108				99				94				93				88				86	
150	107		104				99				93				92				85				84	
200	105	123	102	108	121	+13	98	101	116	+15	92	93	103	+10	90	89	89	0	83	83	84	+1	82	82
250	104		98				97				91				89				82				81	
300	102		96				95				91				88				80				80	
350	100		94				93				88				87				79				78	
400	98	116	91	97	114	+17	90	93	109	+16	85	86	97	+11	84	83	83	0	78	78	79	+1	77	77
450	96		89				88				83				82				77				76	
500	94		87				86				81				80				75				74	
550	92		85				83				79				77				74				72	
600	91	109	83	89	108	+19	81	84	103	+19	77	78	91	+13	75	74	78	+4	72	72	73	+1	71	71
650	89		80				79				75				73				71				70	
700	88		78				77				73				72				69				69	
750	86		76				75				72				70				68				67	
800	84	102	74	80	100	+20	73	76	96	+20	70	71	85	+14	69	68	72	+4	67	67	68	+1	66	66
850			72				71				69				68				66				65	
900			70				69				68				67				65				64	
950			69				67				66				65				63				63	
1000			67				65				65				64				62				62	

Coefficienti di compressibilità della miscela benzolo-alcool amilico.

Pressione in atm.	Benzolo		Benzolo gr. 88,12 Alcool am. „ 11,88				Benzolo gr. 74,49 Alcool am. „ 25,51				Benzolo gr. 58,48 Alcool am. „ 46,52				Benzolo gr. 17,82 Alcool am. „ 82,18				Benzolo gr. 6,52 Alcool am. „ 93,48				Alcool am.	
	$t=21°$	$t=25°$	$t=28°$	$t = 25°$			$t=24°$	$t = 25°$			$t=24°$	$t = 25°$			$t=28°$	$t = 25°$			$t=24°$	$t = 25°$			$t=25°$	$t=25°$
	$10^6 . \beta$ oss.	$10^6 . \beta_1$	$10^6 . \beta$ oss.	$10^6 . \beta_1$	$10^6 . \beta_1$ calc.	δ_1	$10^6 . \beta$ oss.	$10^6 . \beta_1$	$10^6 . \beta_1$ calc.	δ_1	$10^6 . \beta$ oss.	$10^6 . \beta_1$	$10^6 . \beta_1$ calc.	δ_1	$10^6 . \beta$ oss.	$10^6 . \beta_1$	$10^6 . \beta_1$ calc.	δ_1	$10^6 . \beta$ oss.	$10^6 . \beta_1$	$10^6 . \beta_1$ calc.	δ_1	$10^6 . \beta$ oss.	$10^6 . \beta_1$
50	97	102	96	98	100	+2	94	95	98	+3	92	93	94	+1	89	91	90	—1	88	89	88	—1	87	87
100	95		95				91				90				88				86				86	
150	94		94				88				88				86				85				84	
200	93	98	92	94	96	+2	85	86	94	+8	86	87	89	+2	84	86	85	—1	84	85	83	—2	82	82
250	91		88				82				83				83				83				81	
300	88		84				79				81				81				81				80	
350	85		81				77				79				79				79				78	
400	82	87	80	82	86	+4	76	77	84	+7	77	78	82	+4	77	79	79	0	77	78	78	0	77	77
450	80		79				75				76				76				76				76	
500	78		77				74				74				74				74				74	
550	76		76				73				73				73				73				72	
600	74	79	75	77	78	+1	72	73	77	+4	72	73	74	+1	71	73	72	—1	71	72	71	—1	71	71
650	72		73				71				71				70				70				70	
700	70		72				70				70				69				69				69	
750	69		71				69				68				68				68				67	
800	68	73	70	72	72	0	68	69	71	+2	67	68	69	+1	67	69	67	—2	67	68	67	—1	66	66
850			68				67				66				66				66				65	
900			67				66				65				65				65				64	
950			66				65				64				64				63				63	
1000			65				65				63				63				62				62	

Risulta dai numeri contenuti in queste tabelle che in generale il coefficiente di compressibilità diminuisce coll' aumentare della pressione; se si confrontano poi i valori di β_1 fra gli stessi limiti di pressione si vede che a partire dal componente per il quale β_1 è maggiore la compressibilità va gradatamente passando a quella dell' altro componente. Però, come si è già osservato per il coefficiente di dilatazione, anche qui non è soddisfatta la legge addittiva, ma β_1 osservato si mantiene in generale minore di quello calcolato. Se in alcuni casi sembra che si abbia un comportamento inverso conviene notare che ciò ha luogo solo quando le differenze sono molto piccole e che probabilmente rientrano nell' ordine di grandezza degli errori dato il modo un po' arbitrario che fui costretto a tenere per ridurre questi coefficienti alla stessa temperatura; di più ciò ha luogo precisamente nelle miscele benzolo-alcool amilico dove i due componenti presentano coefficienti di compressibilità molto vicini fra loro. Per vero dire anche le differenze fra i valori di β_1 osservati e calcolati che si hanno nelle miscele acetone-alcool amilico, nelle quali si ha prevalenza di acetone, sono certamente troppo grandi e ciò perchè il coefficiente di compressibilità dell' acetone fu osservato a 16° e quindi ridotto a 25° facendo uso, come dissi, del coefficiente di variazione che si deduce dalle osservazioni dell'Amagat per le temperature di 14°,2 e di 99°,5, che deve certamente riuscire troppo grande nel caso mio. Se però si tien conto che anche diminuendo questo coefficiente di variazione non si cambia il segno delle differenze, ma solo il valore è lecito conchiudere senz' altro che β_1 osservato è minore di β_1 calcolato. È notevole che ad una conclusione analoga portino anche le ricerche del Braun [1]) ed altri sulla compressibilità delle soluzioni acquose.

Questo modo di comportarsi delle miscele da me studiato si può in qualche modo spiegare se si tien conto che queste hanno luogo accompagnate da una contrazione come riesce evidente dal confronto fra le densità osservate e quelle calco-

1) Wiedemann Ann. (N. F.) V. 30, an. 1887, p. 250-274 e V. 32, an. 1887, pagina 504-508.

late al solito secondo la legge addittiva rappresentata dalla formula:

$$d_m = \frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{v_1 + v_2}$$

che presento nella seguente tavola.

	Temperatura	$10^4 . d$ oss.	$10^4 . d$ calc.		Temperatura	$10^4 . d$ oss.	$10^4 . d$ calc.
Benzolo	20°	8773	—	Acetone	20°	7962	—
Benzolo gr. 94,32 Alcool am. » 5,68	»	8739	8731	Acetone gr. 93,65 Alcool am. » 6,35	»	7976	7970
Benzolo gr. 88,12 Alcool am. » 11,88	»	8714	8685	Acetone gr 87,61 Alcool am. » 12,39	»	7988	7978
Benzolo gr. 74,49 Alcool am. » 25,51	»	8638	8587	Acetone gr. 51,64 Alcool am. » 48,36	»	8044	8023
Benzolo gr. 46,52 Alcool am. » 53,48	»	8493	8393	Acetone gr. 19.38 Alcool am. » 80,62	»	8075	8063
Benzolo gr. 17,82 Alcool am. » 82,18	»	8234	8202	Acetone gr. 5,52 Alcool am. » 94,48	»	8085	8080
Benzolo gr. 6,52 Alcool am. » 93,48	»	8157	8129	Alcool amilico	»	8088	—
Alcool amilico	»	8088	—				

Il Drecker nel lavoro già citato operando fra una e dieci atmosfere al massimo giunse alla stessa conclusione qui sopra enunciata, cioè che generalmente le miscele che presentano contrazione hanno anche un coefficiente di compressibilità inferiore a quello dedotto dalla legge addittiva; se poi si fa il prodotto dei valori di δ_1 per la corrispondente pressione si vede che va aumentando coll'aumentare della pressione e quindi che se si eseguisce la miscela sotto pressioni di più in più elevate la contrazione tende a sparire.

Analogamente se si moltiplicano i valori di δ, relativi alla dilatazione per le rispettive differenze di temperatura si hanno valori di mano in mano crescenti e quindi eseguendo le miscele a temperature crescenti la contrazione va diminuendo.

Regia Università di Siena
16 Febbraio 1905.

L'ATTRITO NEL MOVIMENTO DI UN SOLIDO IN CONTATTO CON UN PIANO.

Nota del Prof. E. DANIELE.

La definizione e l'espressione delle forze d'attrito, che diedi in un lavoro precedente [1]), estendendo ai sistemi più generali possibili la trattazione nota del Painlevé [2]), meritano che si mostri almeno su un esempio come vengano a presentarsi quelle forze nei problemi speciali di movimento in cui si tien conto dell'attrito. L'esempio scelto, che svolgo in questa Nota, è quello di un corpo rigido assoggettato a rimanere in contatto con un piano, il quale si muove con una legge che supponiamo conosciuta. Non faccio alcuna ipotesi sulle forze esterne applicate al solido, poichè il problema che mi propongo non è già di studiare come il movimento avvenga, ma soltanto quello preliminare di indicare come si ottengano le espressioni definitive delle forze d'attrito da introdursi nelle equazioni del movimento.

In questo calcolo sono da distinguersi due parti, sostanzialmente diverse l'una dall'altra. La prima consiste semplicemente nello specializzare al problema in discorso le espressioni delle forze d'attrito ρ_i contenute nella formola (9) della mia Nota citata; al che si arriva scrivendo le equazioni del vincolo particolare che vogliamo considerare, nonchè la particolare forma che assume la forza viva. In tal modo veniamo

1) Sulla teoria meccanica dell'attrito. Nuovo Cimento, (5), 7, 1904.

2) Leçons sur l'intégr. des éq. de la mécanique, 5.me leçon ; e Leçons sur le frottement ; Paris, Hermann, 1895.

ad esprimere le f_i come forme lineari di certi parametri μ, analoghi ai coefficienti λ di Lagrange coi quali si esprimono le forze vincolari; e noi sappiamo che queste μ (in numero eguale al grado di libertà del sistema) rimangono indeterminate finchè non si ricorre alle leggi sperimentali dell'attrito. La seconda parte del calcolo ha appunto per iscopo di tradurre analiticamente queste leggi in equazioni fra le μ e le λ, ed è la parte che presenta, nel nostro problema speciale, maggiore interesse. Difatti la teoria generale non dice nulla circa la natura delle relazioni che intercedono fra le μ e le λ, per cui è impossibile, a priori, ogni affermazione sulla possibilità e sul modo di calcolare i primi parametri in funzione dei secondi: è una questione che va esaminata caso per caso. In quello da noi preso come esempio l'esperienza ci fornisce tante equazioni fra le μ e le λ quante sono le μ stesse, e sono equazioni che si possono ridurre ad uno o più sistemi lineari, la cui risolubilità, se non si può algebricamente dimostrare nel caso più generale, per le ragioni che si diranno, si può tuttavia presumere, perchè si verifica nei casi particolari.

Le μ dunque sono esprimibili, in generale non univocamente, mediante le λ, ed inoltre mediante il tempo, le coordinate del sistema e le loro derivate prime; e quindi anche le forze d'attrito vengono ad avere un'espressione analoga. Se poi notiamo che il problema del moto di un solido in contatto con un piano, per quanto speciale, pure rappresenta nel concreto un caso dei più generali di movimento con attrito, si concluderà che la soluzione del nostro problema può dare un'idea di quella che spetta a tutti gli altri problemi della medesima classe.

Dirò brevemente qual'è la traccia seguita in questo lavoro.

Riferiamo il sistema a due terne di assi cartesiani ortogonali; una, $x\,y\,z$, fissa nello spazio, ed un'altra, $\xi\,\eta\,\zeta$, fissa nel solido e coll'origine nel suo baricentro G. I coseni degli angoli che i primi assi formano coi secondi siano contenuti nella tabella

	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

Per definire la posizione del solido nello spazio sceglieremo le tre coordinate cartesiane $\alpha\,\beta\,\gamma$ (rispetto agli assi $x\,y\,z$) del suo baricentro, e i tre angoli d' Eulero $\psi\,\varphi\,\theta$. Precisamente, conducendo per G tre assi $x_1\,y_1\,z_1$ paralleli a $x\,y\,z$, diremo θ l' angolo, minore di π, formato dalle direzioni positive di z_1 e ζ; chiamando poi N la linea dei nodi, diretta positivamente in modo che rispetto ad essa sia positiva la rotazione che porta l' asse z_1 sull' asse ζ attraverso l' angolo θ, diciamo ψ l'angolo che x_1 forma con N, e φ l' angolo che N forma con ξ. Allora i nove coseni direttori della tabella precedente sono dati in funzione di $\psi\,\varphi\,\theta$ dalle seguenti formole [1]:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\psi\cos\varphi - \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\\
\alpha_2 &= -\cos\psi\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\psi\cos\varphi\cos\theta\\
\alpha_3 &= \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta\\
\beta_1 &= \operatorname{sen}\psi\cos\varphi + \cos\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\\
\beta_2 &= -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta\\
\beta_3 &= -\cos\psi\operatorname{sen}\theta\\
\gamma_1 &= \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\\
\gamma_2 &= \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\\
\gamma_3 &= \cos\theta\,.
\end{aligned}$$

Quanto al piano che sta in contatto col solido, e che diremo Π, supporremo che nella sua equazione i coefficienti siano funzioni note del tempo, come pure ammetteremo che sian dati in funzione del tempo i sei elementi caratteristici del suo moto istantaneo. Stabiliremo poi che il contatto fra il solido e il piano Π avvenga sempre per un punto: questa condizione, sebbene non indispensabile, è però comoda per la

1) V. p. es. Klein Sommerfeld: Theorie des Kreisels, p. 19.

trattazione geometrica; chiameremo P il punto del solido ove questo è toccato dal piano nell' istante attuale.

Qualunque sia l' ipotesi che si voglia fare sulla natura fisica delle resistenze dovute all' attrito, possiamo sempre imaginarle rappresentate da forze applicate nei vari punti del corpo. Tutte queste forze allora si possono pensare ridotte al punto P, e composte in una forza ed in una coppia: la componente tangenziale della forza risultante è ciò che si suol chiamare *attrito di strisciamento*, mentre la coppia, decomposta in due, cogli assi risp. parallelo e normale a Π, dà luogo alle altre due specie d' attrito, quello di *rotolamento* e quello d' *imperniamento* (*pivotement*) [1]). Poichè le leggi sperimentali dell' attrito hanno un enunciato diverso per ciascuna di queste tre specie d' attrito, occorrerà, per poterle applicare, che ci procuriamo le espressioni dell' attrito di strisciamento, di rotolamento e d' imperniamento, deducendole da quelle che abbiamo chiamato forze d' attrito, e che si calcolano, come s'è detto, specializzando le formole della Nota già nominata. Per ciò fare si può procedere nel modo che segue.

Siano $\rho_\alpha \dots \rho_\theta$ le forze d'attrito relative alle sei coordinate $\alpha \dots \theta$: il lavoro elementare eseguito da queste forze per uno spostamento virtuale del sistema al tempo t è dato da

$$\delta L = \rho_\alpha \delta \alpha + \dots + \rho_\theta \delta \theta .$$

Di qui e dal significato geometrico delle 6 coordinate si vede subito come si possano interpretare le 6 forze corrispondenti. Supponiamo dapprima di aver composto le forze applicate ai varii punti del corpo e che stanno a rappresentare le resistenze d' attrito, prendendo come centro di riduzione il baricentro G. Allora $\rho_\alpha\ \rho_\beta\ \rho_\gamma$ non sono altro che le proiezioni, sugli assi $x\ y\ z$, della forza risultante; mentre $\rho_\psi\ \rho_\varphi\ \rho_\theta$ sono le proiezioni, ortogonali ancora, dell' asse momento della coppia risultante sugli assi $z_1\ \zeta$ N [2]). Ciò stabilito, non si tratterà più che di cercare le proiezioni dello stesso asse momento su tre direzioni ortogonali passanti per G, e poi di trasportare il

1) Cfr. Appell: Traité de mécanique rationelle, 1896, t. 2°, p. 157.
2) V. Klein-Sommerfeld: Th. d. Kreisels; p. 109.

centro di riduzione da G nel punto di contatto P: la forza e la nuova coppia risultanti ci forniranno appunto l' attrito di strisciamento e le coppie d' attrito di rotolamento e d' imperniamento.

Il n. 1 di questa Nota contiene le formole che permettono di passare, dalle proiezioni ortogonali di un segmento sulle rette $z_1 \zeta$ N, alle sue proiezioni sopra tre assi ortogonali coll' origine nello stesso punto G; e precisamente, poichè z_1 e N sono già perpendicolari fra loro, non si fa altro che sostituire a ζ un asse ζ' perpendicolare ai due primi. L' applicazione di queste formole all' asse momento della coppia risultante delle forze d' attrito, nonchè il trasporto del centro di riduzione dal punto G in P, è fatta nel n. seguente, mentre nei n.i 3 e 4 si mostra per quale via si calcolino le $\rho_\alpha \ldots \rho_\theta$ in base all'equazione del vincolo e alla speciale forma della forza viva. Non rimane così che ricorrere alle leggi sperimentali dell' attrito: come queste leggi si traducano in equazioni fra le μ e le λ, e cosa si possa concludere rispetto alla loro risolubilità rispetto alle μ è indicato nei n.i 5-7.

Fin qui la forma del solido è supposta affatto arbitraria. Ora succede che essa interviene nei calcoli, mediante l' equazione del contorno del solido, in modo esplicito: rimanendo indeterminata, non si può giungere a formole definitive per i coefficienti delle μ in $\rho_\alpha \ldots \rho_\theta$, e quindi neppure per i varii termini delle equazioni da cui si debbono ricavare le μ. È dunque necessario specializzare ulteriormente il problema; perciò, volendo considerare un caso possibilmente semplice, applico la teoria precedente ad una sfera omogenea in contatto con un piano fisso. In questo esempio, in cui ogni elemento di indeterminazione è scomparso ed i calcoli si possono spingere fino in fondo, si vede che le cinque μ sono effettivamente calcolabili e si esprimono come prodotti del modulo di λ (in questo problema i vincoli danno luogo ad una sola equazione) per dei coefficienti che sono funzioni delle tre coordinate ψ φ θ, delle loro derivate e di $\alpha' \beta' \gamma'$ (n. 8).

Quando il legame imposto al solido consiste unicamente nel contatto col piano Π, sono possibili tutti e tre i moti elementari di strisciamento, di rotolamento e d' imperniamento,

a cui corrispondono tre diverse specie d'attrito. Ma si può pensare di aggiungere nuovi legami, in modo che di quei tre movimenti uno o due vengano a mancare. Nei n.i 9-11 sono studiati due di questi casi (chè non è lecito chiamare senz'altro casi particolari del precedente), cioè quello in cui manca il rotolamento e quello in cui il solido si riduce puramente a rotolare sul piano. La particolarità più notevole che si presenta in questi problemi è che, malgrado l'assenza di qualcuno dei tre moti elementari, pure continua a comparire l'espressione dell'attrito corrispondente: la cosa non offre nulla di contradditorio, e quelle espressioni, che rappresentano sempre reazioni dovute all'attrito, ammettono un'interpretazione molto ovvia.

Finalmente un breve confronto fra i tre problemi trattati mostra (n. 12) quali relazioni, dal punto di vista delle resistenze, passino fra di loro. Quando in un sistema si restringe il grado di libertà, nel nuovo sistema che si ottiene si verifica una diminuzione nel numero dei parametri μ, e per contro un eguale aumento nel numero delle λ. Si comprende allora che debba essere possibile passare dalle forze d'attrito del primo problema a quelle del secondo prendendo, in luogo delle μ, delle combinazioni lineari di analoghi parametri, in numero minore, che saranno poi le μ relative al secondo problema; e che inversamente, ponendo le λ del secondo problema eguali a opportune combinazioni lineari di quelle del primo, si debba trasformare le forze vincolari del secondo problema in quelle del primo. In altre parole si riesce a restringere il grado di libertà d'un sistema ponendo delle relazioni lineari fra le μ; invece il sopprimere qualche vincolo torna a porre delle relazioni lineari fra le λ. La questione si potrebbe studiare in modo affatto generale; ci accontentiamo per ora di verificare i fatti accennati sugli speciali sistemi a cui abbiamo voluto riferirci.

1. Consideriamo le due terne d'assi ortogonali, che furono indicate con $\xi \eta \zeta$ e $x_1 y_1 z_1$, entrambe coll'origine nel punto G, e diciamo σ un segmento uscente dallo stesso punto G. Questo segmento si proietti ortogonalmente su z_1, su ζ e su N (linea

dei nodi relativa alle due terne d' assi) nei tre segmenti σ_{z_1}, σ_ζ, σ_N : ci proponiamo di trovarne le proiezioni ortogonali su $x_1\, y_1\, z_1$.

Tiriamo anzitutto, nel piano $z_1\,\zeta$, una retta ζ' perpendicolare a z_1, diretta positivamente in modo che la rotazione positiva che porta z_1 su ζ' attraverso l' angolo retto concordi con quella che porta z_1 su ζ attraverso l' angolo θ ($< \pi$); mediante semplici considerazioni geometriche troviamo come proiezione ortogonale di σ su ζ' :

$$\sigma_{\zeta'} = \frac{\sigma_\zeta - \sigma_{z_1} \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} .$$

Notiamo subito che, dalla convenzione fatta riguardo al senso positivo di ζ' (nonchè da quelle stabilite per tutti gli altri assi considerati), risulta come un osservatore disteso lungo la N positiva vede rotare z_1, per andare a sovrapporsi a ζ, nel medesimo senso che un osservatore disteso lungo y_1 vede rotare la stessa z_1 per sovrapporsi a x_1; ne segue che sono direttamente congruenti le terne $x_1\, y_1\, z_1$, $\zeta'\, N\, z_1$. Si avranno allora senz' altro le proiezioni cercate del segmento σ sulla prima terna, poichè conosciamo le proiezioni sulla seconda. Osservando che la coppia $\zeta'\,N$ si riduce alla coppia $x_1\, y_1$ colla rotazione (positiva) dell' angolo $\frac{\pi}{2} - \psi$, si ha, indicando con σ_{x_1} e σ_{y_1} le proiezioni ortogonali di σ su x_1 e y_1 :

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{\zeta'} \operatorname{sen}\psi + \sigma_N \cos\psi , \qquad \sigma_{y_1} = - \sigma_{\zeta'} \cos\psi + \sigma_N \operatorname{sen}\psi ;$$

e sostituendo l' espressione di $\sigma_{\zeta'}$, precedentemente trovata :

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma_{x_1} = \dfrac{\sigma_\zeta - \sigma_{z_1} \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \operatorname{sen}\psi + \sigma_N \cos\psi \\[2ex] \sigma_{y_1} = - \dfrac{\sigma_\zeta - \sigma_{z_1} \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \cos\psi + \sigma_N \operatorname{sen}\psi . \end{cases}$$

2. Supponiamo ora che il segmento σ sia l' asse momento della coppia che risulta trasportando nel punto G tutte le forze, applicate nei varii punti del solido, che stanno a rappresentare le resistenze dovute all' attrito. Come fu rilevato nell' introduzione, quell' asse momento si proietta ortogonalmente su-

gli assi $z_1\,\zeta\,N$ in tre segmenti i cui valori sono $\rho_\psi\ \rho_\varphi\ \rho_\theta$, cioè i coefficienti di $\delta\psi$, $\delta\varphi$, $\delta\theta$ nell'espressione del lavoro virtuale delle forze d'attrito; applicando le (1) troviamo come sue componenti rispetto a $x_1\,y_1\,z_1$:

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho x_1 = \dfrac{\rho_\varphi - \rho_\psi \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \operatorname{sen}\psi + \rho_\theta \cos\psi \\[2ex] \rho y_1 = -\dfrac{\rho_\varphi - \rho_\psi \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \cos\psi + \rho_\theta \operatorname{sen}\psi \\[2ex] \rho z_1 = \rho_\psi\,. \end{cases}$$

Insieme a questa coppia vi ha da considerare una forza come risultante delle azioni d'attrito: le sue componenti sugli stessi assi sono $\rho_\alpha\ \rho_\beta\ \rho_\gamma$.

Prendiamo ora come centro di riduzione non più il punto G, ma il punto P di contatto del solido col piano Π; siano $x_0\ y_0\ z_0$ le sue coordinate rispetto agli assi $x\ y\ z$.

Conducendo per P tre assi $x_2\ y_2\ z_2$ paralleli a x_1, $y_1\ z_1$, la forza risultante nella nuova riduzione avrà ancora per componenti $\rho_\alpha\ \rho_\beta\ \rho_\gamma$, mentre la coppia avrà un asse momento di proiezioni

$$(3)\qquad \begin{cases} \rho x_2 = \rho x_1 + (z_0 - \gamma)\,\rho_\beta - (y_0 - \beta)\,\rho_\gamma \\ \rho y_2 = \rho y_1 + (x_0 - \alpha)\,\rho_\gamma - (z_0 - \gamma)\,\rho_\alpha \\ \rho z_2 = \rho z_1 + (y_0 - \beta)\,\rho_\alpha - (x_0 - \alpha)\,\rho_\beta\,. \end{cases}$$

Infine roteremo gli assi $x_2\ y_2\ z_2$ intorno al punto P in modo che i due primi vengano a disporsi lungo due rette X e Y del piano Π, onde z_2 si disporrà lungo la normale Z a Π. Sia

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

l'equazione di questo piano già ridotta a forma normale, per cui $a\ b\ c$ indicheranno i coseni direttori di Z rispetto alla terna $x_2\ y_2\ z_2$ (o, che fa lo stesso, rispetto a $x\ y\ z$); rappresentiamo con $a'\ b'\ c'$, $a''\ b''\ c''$ i coseni direttori di X e di Y ri-

spetto alla stessa terna. La coppia risultante d' attrito avrà per componenti dell' asse momento rispetto alla terna X Y Z:

$$
(4) \qquad \begin{cases} \rho_X = \rho_{x_2} a' + \rho_{y_2} b' + \rho_{z_2} c \\ \rho_Y = \rho_{x_2} a'' + \rho_{y_2} b'' + \rho_{z_2} c'' \\ \rho_Z = \rho_{x_2} a + \rho_{y_2} b + \rho_{z_2} c \,, \end{cases}
$$

mentre la forza risultante si proietta sugli stessi assi nei segmenti

$$
(5) \qquad \begin{cases} R_X = \rho_\alpha a' + \rho_\beta b' + \rho_\gamma c' \\ R_Y = \rho_\alpha a'' + \rho_\beta b'' + \rho_\gamma c'' \\ R_Z = \rho_\alpha a + \rho_\beta b + \rho_\gamma c \,. \end{cases}
$$

3. Le ρ_X ρ_Y ρ_Z, R_X R_Y R_Z saranno note quando si siano calcolate le $\rho_\alpha \ldots \rho_\theta$, e per il calcolo di queste ultime occorre procurarsi l' espressione della forza viva e le equazioni dei vincoli.

Indicando con M la massa del solido, con A B C i momenti d' inerzia relativi agli assi $\xi\, \eta\, \zeta$ (che supporremo coincidenti cogli assi principali centrali d' inerzia), e con $p\, q\, r$ le proiezioni della rotazione istantanea sugli assi medesimi, si ha per la forza viva:

$$
T = \frac{1}{2} M (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) + \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2) :
$$

dove alle $p\, q\, r$ è possibile sostituire le $\psi'\, \varphi'\, \theta'$ ricorrendo alle formole

$$
(6) \qquad \begin{cases} p = \psi' \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta + \theta' \cos \varphi \\ q = \psi' \cos \varphi \operatorname{sen} \theta - \theta' \operatorname{sen} \varphi \\ r = \psi' \cos \theta + \varphi' \,. \end{cases}
$$

Venendo ai vincoli, supporremo dapprima che non si imponga al corpo altro legame all' infuori di quello di rimanere in contatto col piano Π (problema I). Si ha allora una sola

equazione fra le 6 coordinate $\alpha \dots \theta$, che si può ottenere nel modo seguente [1]. L' equazione

$$a x_0 + b y_0 + c z_0 + d = 0$$

esprime che il punto P appartiene al piano; sostituendo colle

$$x_0 = \alpha + \alpha_1 \xi_0 + \alpha_2 \eta_0 + \alpha_3 \zeta_0, \quad y_0 = \beta + \beta_1 \xi_0 + \dots, \quad z_0 = \gamma + \gamma_1 \xi_0 + \dots,$$

che legano le coordinate di P rispetto agli assi $x\ y\ z$ colle sue coordinate $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0$ rispetto agli assi $\xi\ \eta\ \zeta$, si ottiene l' equazione

$$(7) \quad a\alpha + b\beta + c\gamma + d + \xi_0(a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1) + \eta_0(a\alpha_2 + \dots) + \zeta_0(a\alpha_3 + \dots) = 0.$$

Il fatto poi che P appartiene anche alla superficie del solido è espresso dall' equazione

$$(7') \qquad F(\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0) = 0,$$

se $F(\xi\ \eta\ \zeta) = 0$ è l' equazione di quella superficie riferita agli assi mobili. Infine le equazioni

$$(7'') \quad \frac{a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial \xi_0}} = \frac{a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2}{\frac{\partial F}{\partial \eta_0}} = \frac{a\alpha_3 + b\beta_3 + c\gamma_3}{\frac{\partial F}{\partial \zeta_0}}$$

esprimono la relazione di contatto fra la superficie F e il piano Π. Eliminando, fra le quattro equazioni (7) (7') (7''), le $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0$, si avrà in generale un' equazione unica, nella quale figureranno solo il tempo t (contenuto esplicitamente in $a\ b\ c\ d$), le $\alpha\ \beta\ \gamma$ e le $\psi\ \varphi\ \theta$ (contenute nei coseni di direzione $\alpha_s\ \beta_s\ \gamma_s$). Se l'eliminazione indicata supponiamo di farla ricavando $\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0$ dalle (7') (7'') e sostituendo poi nella (7), sarà quest' ultima l' equazione che rappresenta analiticamente il vincolo. S' intende che in luogo delle $\alpha_s\ \beta_s\ \gamma_s$ si dovranno porre le loro espressioni in funzione delle $\psi\ \varphi\ \theta$.

4. Indicheremo le $\alpha \dots \theta$, prese in un certo ordine, con $x_1 \dots x_6$. Supposto allora che la (7) sia risolubile rispetto alla

1) V. Maggi. Principii di Stereodinamica, p. 29, (Milano, Hoepli 1903).

x_6, assumiamo le rimanenti x come parametri indipendenti, e chiamiamole ordinatamente $q_1 \dots q_5$. Si avrà, per $i = 1 \dots 5$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_s} = \begin{cases} 1, & (i = s) \\ 0, & (i \text{ diverso da } s); \end{cases}$$

i coefficienti b'_{is} della mia Nota citata (n. 2) diventano

$$b'_{is} = E_{is} + E_{i6} \frac{\partial x_6}{\partial q_s} \begin{pmatrix} i = 1 \dots 6 \\ s = 1 \dots 5 \end{pmatrix}$$

essendo E_{is} i coefficienti della forza viva; e le forze d'attrito ρ_i relative alle 6 coordinate x_i sono

$$\rho_i = \Sigma_s\, b'_{is}\, \mu_s = \Sigma_s\, E_{is}\, \mu_s + E_{i6}\, \Sigma_s \frac{\partial x_6}{\partial q_s} \mu_s .$$

Queste ρ_i non sono poi altro, prese in un certo ordine, che le $\rho_\alpha \dots \rho_\theta$ del n. 2; non vi sarà dunque che da introdurle nelle (2) (3), ed infine nelle (4) (5) per avere le componenti della coppia e della forza d'attrito quando si prenda il punto P come centro di riduzione.

Tutte le azioni dovute all'attrito si riducono a questa forza e a questa coppia; tanto la prima quanto l'asse momento della seconda hanno una componente normale ed una tangenziale alle due superficie a contatto. La forza ha per componente normale R_z [eq. (5)]: essa rappresenta l'alterazione che subisce la resistenza normale del piano in causa dell'attrito. Quest'ultimo cioè non solo dà alla resistenza del piano una componente tangenziale, ma altera pure la grandezza della componente normale [1]). La componente tangenziale della stessa forza è data da R_x e R_y, e rappresenta il così detto *attrito di strisciamento,* cioè quella resistenza che si oppone, in causa dell'attrito, alle traslazioni del solido parallelamente al piano.

La coppia d'attrito a sua volta si decomporrà in due coppie, delle quali una agisce in un piano normale a Π, ed è quella che ha per asse momento il segmento di componenti ρ_x e ρ_y [eq. (4)]; l'altra agisce in un piano parallelo a Π, ed

1) Cfr. Painlevé: Leçons sur le frott., p. 38.

il suo asse momento è il segmento ρ_z. La prima ci dà l' *attrito di rotolamento*, e s' oppone alle rotazioni del solido intorno ad assi giacenti in Π; la seconda rappresenta l' *attrito di imperniamento*, e contrasta le rotazioni intorno alla normale comune alla superficie del solido e a Π.

La presenza di queste tre specie d' attrito corrisponde al movimento più generale del solido in contatto col piano. Si può osservare che nel problema attuale le resistenze vincolari si riducono esclusivamente ad una forza applicata in P e diretta normalmente a Π: è ciò che risulta immediatamente dall' osservare che in uno spostamento virtuale qualunque del solido le resistenze vincolari debbono eseguire un lavoro nullo.

5. Le forze d' attrito, il cui calcolo fu indicato nel n. precedente, sono espresse in funzione di cinque parametri μ; si tratta di far vedere come le leggi sperimentali da cui dipende l' attrito permettano di calcolare le μ in funzione del coefficiente λ corrispondente all' unica equazione del vincolo, e quindi conducano alla determinazione completa delle forze d' attrito. Le esperienze sulle resistenze d' attrito concordano nell' affermare che l' attrito delle tre specie, di strisciamento, di rotolamento e d' imperniamento, è proporzionale, in valore assoluto, alla pressione del solido contro il piano; i tre fattori di proporzionalità (coefficienti d' attrito) si possono supporre sempre positivi, e dipendono in generale dal punto del contorno del solido attualmente in contatto col piano [1]). Inoltre la forza d' attrito di strisciamento è direttamente opposta alla

1) Il contatto fra le due superficie avvenendo per un punto, non v' ha luogo a dichiarare se l' attrito dipenda o no dall' estensione delle superficie a contatto. Riguardo ai coefficienti d' attrito osservo che non accennai alla loro indipendenza, generalmente ammessa, dalla velocità relativa dei due solidi a contatto e dalla pressione dell' uno sull' altro: in realtà secondo alcuni sperimentatori (cfr. Masi " Le nuove vedute nelle ricerche teoriche ed sperimentali sull' attrito „ cap. I, Bologna, Zanichelli, 1897) questa indipendenza sarebbe tutt' altro che sicura; siccome però i coefficienti d' attrito non avranno da presentarsi, in ciò che segue, nella loro forma esplicita, è inutile ogni discussione sul modo onde sono costituiti. Per questa medesima ragione non mi occorre avvertire se intendo di considerare l' attrito a secco oppure coi lubrificanti; difatti la presenza o meno di un lubrificante influisce soltanto sul coefficiente d' attrito, cioè sulla natura delle grandezze onde esso è formato e sul modo come queste entrano a comporlo, ma non influisce sull' espressione generale della forza d' attrito (V. Masi, op. cit. p. 52).

velocità del punto P nel moto del solido relativamente al piano; mentre gli assi momenti delle coppie d'attrito di rotolamento e d'imperniamento sono opposti risp. ai segmenti che rappresentano le rotazioni tangenziale e normale del solido intorno al punto P.

Cominciamo dall'attrito di strisciamento. Se diciamo ω la velocità angolare del solido in quanto rota intorno al punto G, e $\omega_x\ \omega_y\ \omega_z$ le sue proiezioni sugli assi fissi, la velocità effettiva di P, considerato come appartenente al solido, avrà per proiezioni sugli assi fissi

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha' + \omega_y (z_0 - \gamma) - \omega_z (y_0 - \beta) \\ u_y &= \beta' + \omega_z (x_0 - \alpha) - \omega_x (z_0 - \gamma) \\ u_z &= \gamma' + \omega_x (y_0 - \beta) - \omega_y (x_0 - \alpha)\,; \end{aligned}$$

e queste formole contengono nei secondi membri $\psi'\,\varphi'\,\theta'$ in causa delle relazioni, analoghe alle (6):

$$(6') \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_x &= \varphi' \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta + \theta' \cos\psi \\ \omega_y &= -\varphi' \cos\psi \operatorname{sen}\theta + \theta' \operatorname{sen}\psi \\ \omega_z &= \varphi' \cos\theta + \psi'\,. \end{aligned} \right.$$

La velocità dello stesso punto P in quanto appartiene al piano Π, cioè la velocità del punto del piano che nell'istante attuale coincide col punto P del solido, si può rappresentare coi trinomii

$$\begin{aligned} v_x &= h_x + \chi_y z_0 - \chi_z y_0 \\ v_y &= h_y + \chi_z x_0 - \chi_x z_0 \\ v_z &= h_z + \chi_x y_0 - \chi_y x_0\,, \end{aligned}$$

dove $h_x\ h_y\ h_z$, $\chi_x\ \chi_y\ \chi_z$ sono funzioni note del tempo, poichè si suppone che il movimento del piano sia assegnato. Quindi la velocità relativa del punto P nel moto del solido rispetto al piano avrà per componenti

$$w_x = u_x - v_x\,,\quad w_y = u_y - v_y\,,\quad w_z = u_z - v_z\,;$$

la sua grandezza verrà indicata con w, e saranno chiamate $w_X\ w_Y\ w_Z$ le sue proiezioni sugli assi X Y Z. La w_Z è evidentemente nulla, quindi avremo:

$$w = \sqrt{w^2_X + w^2_Y}\,.$$

Dobbiamo inoltre calcolare la reazione normale che il piano esercita contro la pressione del solido: una parte di questa reazione è data da R_z, ed è quella che proviene dall'attrito (v. n. 4); rimane da cercare quella che si avrebbe se il contatto fra le due superficie avvenisse senza attrito, quella, cioè, che fa parte delle resistenze vincolari.

L'insieme di queste resistenze si decompone (in un certo senso), analogamente alle resistenze d'attrito, secondo le sei coordinate $\alpha \dots \theta$, dando luogo a sei forze $\rho'_\alpha \dots \rho'_\theta$, che si calcolano ricorrendo alle equazioni dei vincoli, e si esprimono mediante il parametro λ. Rappresentando con f il primo membro dell'unica equazione per i vincoli che si ha nel nostro problema, cioè della (7), le $\rho'_\alpha \dots \rho'_\theta$ son date da

$$\rho'_\alpha = \lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \dots, \quad \rho'_\theta = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Il significato di queste sei forze è perfettamente analogo a quello trovato per le $\rho_\alpha \dots \rho_\theta$, e applicando le (2) (3) (4) (5) si giunge a concentrare tutti gli sforzi vincolari nel punto P, e a trovare le proiezioni, sugli assi X Y Z, della forza risultante e dell'asse momento della coppia risultante di questi sforzi. La coppia è nulla, come fu già osservato alla fine del n. 4; quanto alla forza abbiamo:

$$\rho'_\alpha = \lambda a, \quad \rho'_\beta = \lambda b, \quad \rho'_\gamma = \lambda c,$$

cioè essa è normale al piano Π (come già sapevamo), e la sua grandezza è λ. Pertanto la pressione totale del solido contro il piano è data in valore assoluto da

$$|\lambda + R_z|.$$

Con ciò siamo in grado di scrivere le due condizioni sperimentali relative allo strisciamento; esse sono contenute nelle due equazioni seguenti:

$$(8) \qquad R_x = -f_s \left|\lambda + R_z\right| \frac{w_x}{w}, \qquad R_y = -f_s \left|\lambda + R_z\right| \frac{w_y}{w}.$$

Il fattore f_s è il coefficiente d'attrito di strisciamento: come fu detto dipenderà, in generale, dalle coordinate dei punti appartenenti al contorno del solido.

6. In modo analogo si scrivono le condizioni che si riferiscono al rotolamento e all' imperniamento. L' enunciato sperimentale circa la grandezza e l' orientazione della coppia d' attrito di rotolamento si traduce nelle equazioni

$$(9)\quad \rho_X = -f_r \left| \lambda + R_z \right| \frac{\omega_X}{\omega_r}, \qquad \rho_Y = -f_r \left| \lambda + R_z \right| \frac{\omega_Y}{\omega_r},$$

avendo posto

$$\sqrt{\omega^2_X + \omega^2_Y} = \omega_r,$$

cioè indicando con ω_r la componente tangenziale della rotazione del solido intorno al punto P. Quanto a f_r non è altro che il coefficiente d' attrito di rotolamento, e gode di proprietà analoghe a f_s.

Per l' attrito d' imperniamento infine si ha l' equazione

$$(10)\qquad \rho_z = \pm f_i \left| \lambda + R_z \right|,$$

dove f_i è il coefficiente d' imperniamento, ed è positivo come f_s e f_r; la scelta del segno nel secondo membro è subordinata alla condizione

$$(10')\qquad \rho_z \, \omega_z < 0.$$

L' esperienza ci fornisce dunque cinque equazioni fra le ρ, le R e λ, cioè le equazioni (8) (9) (10); ma le ρ e le R sono forme lineari nelle μ, che sono pure in numero di cinque, onde si ha, per calcolare le μ in funzione di λ, un sistema di tante equazioni quante sono le μ. Questo sistema si può leggermente trasformare, in modo da renderlo più atto al calcolo che ci interessa. Ricavando $\left| \lambda + R_z \right|$ dalla (10) e sostituendo nelle (8) e (9), ponendo inoltre per brevità

$$\frac{f_s}{f_i} = \varphi_s, \qquad \frac{f_r}{f_i} = \varphi_r,$$

si trova:

$$(8')\qquad R_X = \mp \varphi_s \, \rho_z \frac{w_X}{w}, \qquad R_Y = \mp \varphi_s \, \rho_z \frac{w_Y}{w},$$

$$(9')\qquad \rho_X = \mp \varphi_r \, \rho_z \frac{\omega_X}{\omega_r}, \qquad \rho_Y = \mp \varphi_r \, \rho_z \frac{\omega_Y}{\omega_r}.$$

Per il calcolo delle μ avremo dunque da servirci delle (8') (9') e della (10), quest' ultima o nella forma

$$(11) \qquad \rho_z = f_i (\lambda + R_z)$$

oppure nell' altra

$$(11') \qquad \rho_z = - f_i (\lambda + R_z) ,$$

per modo che siamo ridotti alla risoluzione di sistemi di equazioni lineari. Si noti però che la determinazione delle μ non è unica, perchè nelle cinque equazioni del sistema compaiono dei termini col doppio segno: ora la scelta del segno dipende da quello della rotazione ω_z, che è un' incognita nel problema di movimento, e quindi non potrà servirci, in generale, per fissare a priori il segno nelle equazioni che definiscono le μ.

7. Si tratterebbe ora di discutere questi sistemi di equazioni, per vedere se ed a quali condizioni si prestano al calcolo delle μ.

Delle cinque equazioni che dobbiamo considerare, cioè le (8') (9') (10), le prime quattro sono lineari ed omogenee nelle μ, e, secondo che si prendono in esse i segni superiori od inferiori, danno luogo a due sistemi differenti che chiameremo, per distinguerli, (S) e (S'). La (10) a sua volta comprende due equazioni, la (11) e la (11'), a seconda del segno del secondo membro, e ciascuna delle due equazioni va unita sia a (S) sia a (S') per costituire il sistema completo di relazioni fra le μ e λ. In sostanza risultano quattro sistemi di equazioni lineari nelle μ, per cui queste ultime non saranno in generale determinate in modo unico.

Per il nostro scopo si dovrebbe, in primo luogo, costruire i determinanti dei coefficienti di ciascuno di quei quattro sistemi, e verificare se uno almeno di essi è diverso da zero. Ora, su tale questione non vedo come si possa rispondere in modo assoluto: rimane troppo vaga e indeterminata, nel caso generale, la forma delle $\rho_\alpha \dots \rho_\theta$, e quindi dei coefficienti, nelle nostre equazioni, oltre di che compaiono in queste ultime degli elementi di natura sperimentale (come i coefficienti d' attrito) sul cui quantitativo nulla si può dire in linea teorica.

Certo, nei casi particolari, come in quello trattato nel n. seguente, si verifica l' indipendenza e la coesistenza delle cinque equazioni che legano le μ, ed è presumibile che lo stesso debba accadere in tutti gli esempi di egual natura. Ammesso allora, per induzione, che dei nostri quattro sistemi uno almeno abbia il determinante dei coefficienti diverso da zero, supponiamo, per fissare le idee, che sia quello formato dalle quattro equazioni (S) e dalla (11). Risolvendo le (S) rispetto a quattro delle μ, queste si esprimeranno come prodotti della rimanente, che diremo μ_h, per certi coefficienti. La stessa cosa si potrà dire di ρ_z e di R_z, e noi porremo

$$\rho_z = H\,\mu_h\,, \quad R_z = K\,\mu_h\;; \tag{12}$$

porremo invece

$$\rho_z = H'\,\mu_h\,, \quad R_z = K'\,\mu_h \tag{12'}$$

nell' ipotesi che il sistema (S) sia sostituito da (S'). Nel primo caso la (10) diventa

$$H\,\mu_h - f_t\,|\,\lambda + K\,\mu_h\,| = 0\,,$$

e nel secondo caso

$$H'\,\mu_h + f_t\,|\,\lambda + K'\,\mu_h\,| = 0.$$

La risoluzione delle nostre cinque equazioni si riduce così in definitiva a ricavare μ_h da una delle quattro equazioni lineari

$$(H \pm f_t\,K)\,\mu_h \pm f_t\,\lambda = 0\,, \tag{13}$$

$$(H' \pm f_t\,K')\,\mu_h \pm f_t\,\lambda = 0\,, \tag{13'}$$

dove i segni superiori ed inferiori non corrispondono più ai sistemi (S) e (S'). Ora se facciamo l' ipotesi $\omega_z < 0$ [il che equivale a prendere nelle cinque equazioni i segni superiori, e per ρ_z e R_z le espressioni (12)], segue dalla (10') che dev'essere $\rho_z > 0$, ossia μ_h deve avere lo stesso segno di H; nell' ipotesi $\omega_z > 0$ dovrà invece μ_h avere il segno opposto di H'. Che nella prima ipotesi le (13) forniscano, l' una o l' altra, una soluzione del segno di H, e che, nella seconda ipotesi, le (13') diano una soluzione di segno opposto ad H', è una cosa che dipende dai

coefficienti delle (13) (13'); ma su questo punto nulla si può aggiungere in linea generale, per le stesse ragioni che ci impedivano di pronunziarci sull' indipendenza delle cinque equazioni nelle μ.

In sostanza, possiamo enunciare come segue le condizioni alle quali le μ sono esprimibili in funzione di λ, e questo in un numero finito di modi (quattro al più) conformemente alle leggi sperimentali dell' attrito. Messe le equazioni, che traducono i risultati dell' esperienza, sotto la forma (8') (9') (10), dovrà accadere — 1°) che uno almeno dei quattro sistemi lineari che legano le μ a λ abbia il determinante dei coefficienti diverso da zero, — 2°) che dalle due equazioni lineari (13), oppure (13'), si possa ricavare una radice il cui segno sia quello di H, oppure risp. contrario a quello di H'. La seconda condizione non si potrà generalmente verificare che dopo d'aver eseguita l' integrazione delle equazioni del movimento, e servirà a limitare, all' occorrenza, la determinazione multipla che risultava per le μ mediante λ, e quindi a segnalare certe soluzioni del problema, da rigettarsi perchè contradditorie ai dati dell' esperienza.

8. È opportuno mostrare almeno in un caso particolare, nel quale si possa giungere fino alle formole definitive, come si presenti la questione che ora abbiamo trattato in generale. Supponiamo che il solido considerato sia una sfera omogenea, di cui diremo r il raggio, M la massa e $A = \frac{2}{5} M r^2$ il momento d' inerzia rispetto a un diametro qualunque; il piano Π sia fisso, e assumiamolo come piano xy. Gli assi $\xi \eta \zeta$ passeranno pel centro G della sfera, la cui superficie, riferita a questi assi, avrà per equazione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2,$$

mentre $z = 0$ è l' equazione del piano Π, riferito agli assi fissi. L' equazione (7), che esprime la relazione di contatto della sfera e del piano si riduce semplicemente a

$$\gamma = r.$$

Per la forza viva della sfera abbiamo poi

$$T = \frac{1}{2} M (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) + \frac{1}{2} A (\psi'^2 + \phi'^2 + \theta'^2 + 2 \cos\theta \,.\, \psi' \phi'),$$

e quindi se poniamo

$$\psi = x_1 , \quad \phi = x_2 , \quad \theta = x_3 , \quad \alpha = x_4 , \quad \beta = x_5 , \quad \gamma = x_6 ,$$

fra i coefficienti E_{ij} di T gli unici che non siano nulli sono

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = A , \qquad E_{12} = A \cos\theta ,$$
$$E_{44} = E_{55} = E_{66} = M .$$

Prendendo, secondo il n. 4, $x_1 \dots x_5$ come parametri indipendenti $q_1 \dots q_5$, si ha:

$$\frac{\partial x_6}{\partial q_s} = 0 , \qquad (s = 1 \dots 5)$$

e quindi

$$b'_{is} = E_{is} ;$$

allora si hanno subito le sei forze d' attrito, cioè

$$\rho_1 = \rho_\psi = A (\mu_1 + \cos\theta \,.\, \mu_2)$$
$$\rho_2 = \rho_\phi = A (\cos\theta \,.\, \mu_1 + \mu_2)$$
$$\rho_3 = \rho_\theta = A \mu_3$$
$$\rho_4 = \rho_\alpha = M \mu_4 , \quad \rho_5 = \rho_\beta = M \mu_5 , \quad \rho_6 = \rho_\gamma = 0 .$$

Gli assi X Y Z si erano presi in modo che Z fosse perpendicolare al piano Π nel punto P; poichè ora Π coincide col piano $x\ y$, possiamo assumere come assi X Y Z gli stessi $x_2\ y_2\ z_2$; perciò le $\rho_\alpha\ \rho_\beta\ \rho_\gamma$ sono precisamente le $R_X\ R_Y\ R_Z$ del n. 2.

Non rimane dunque che calcolare $\rho_X\ \rho_Y\ \rho_Z$, cioè le componenti dell' asse momento della coppia d' attrito. Applicando successivamente le (2) e le (3) si ha, coll' osservare che le coordinate $x_0\ y_0\ z_0$ del punto P di contatto sono $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, $z_0 = 0$:

$$(14)\quad \begin{cases} \rho_X = \rho_{x_2} = \quad A(\mu_1 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \mu_3 \cos\psi) - M\, r\, \mu_5 \\ \rho_Y = \rho_{y_2} = - A(\mu_2 \operatorname{sen}\theta \cos\psi - \mu_3 \operatorname{sen}\psi) + M\, r\, \mu_4 \\ \rho_Z = \rho_{z_2} = A(\mu_1 + \mu_3 \cos\theta)\,. \end{cases}$$

Volendo scrivere le equazioni che traducono le leggi sperimentali dell'attrito, comincieremo col notare che, essendo fisso il piano Π, la velocità del punto P nel moto della sfera relativamente al piano è quella le cui componenti si erano indicate al n. 5 con $u_x\, u_y\, u_z$.

Osservando poi che le proiezioni di un segmento qualunque sugli assi X Y Z sono eguali a quelle fatte sugli assi $x\, y\, z$, avremo:

$$w_X = u_x = \alpha' - \omega_y\, r\,, \qquad w_Y = u_y = \beta' + \omega_x\, r\,;$$

dove nei secondi membri s' intenderanno sostituite per ω_x e ω_y le espressioni (6') del n. 5. Con ciò le leggi sperimentali relative all' attrito di strisciamento danno luogo alle due equazioni

$$(15)\qquad M\,\mu_4 = - f_s\,|\lambda|\,\frac{u_x}{u}\,, \qquad M\,\mu_5 = - f_s\,|\lambda|\,\frac{u_y}{u}\,,$$

dove s' è posto

$$u = \sqrt{u^2_x + u^2_y}\,,$$

e sono le (8) del caso generale. In esse però si presenta una particolarità notevole: la mancanza, nei secondi membri, di R_z [1]); perció ci forniscono senz' altro μ_4 e μ_5.

Non resta che considerare a parte le equazioni corrispondenti alle altre specie d' attrito. Il rotolamento ci dà le due equazioni

$$\rho_X = - f_r\,|\lambda|\,\frac{\omega_x}{\omega_r}\,, \qquad \rho_Y = - f_r\,|\lambda|\,\frac{\omega_y}{\omega_r}\,,$$

1) Quando adunque il solido è una sfera omogenea, l'attrito non altera la resistenza normale del piano.

le quali, sostituendo nei primi membri colle (14), diventano:

$$(16)\qquad \begin{cases} \mu_2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \mu_3 \cos\psi = \Lambda_1 \\ \mu_2 \operatorname{sen}\theta \cos\psi - \mu_3 \operatorname{sen}\psi = \Lambda_2 \end{cases}$$

$$\Lambda_1 = -\frac{|\lambda|}{A}\left(f_s\, r\, \frac{u_y}{u} + f_r\, \frac{\omega_x}{\omega_r}\right)$$

$$\Lambda_2 = -\frac{|\lambda|}{A}\left(f_s\, r\, \frac{u_x}{u} - f_r\, \frac{\omega_y}{\omega_r}\right).$$

All' imperniamento corrisponde l' equazione

$$(17)\qquad A(\mu_1 + \mu_2 \cos\theta) = \pm f_i\, |\lambda|\,.$$

colla condizione

$$(17')\qquad (\mu_1 + \mu_2 \cos\theta)\, \omega_z < 0\,.$$

Le (16), moltiplicate risp. per $\cos\psi$ e $-\operatorname{sen}\psi$ e sommate, danno

$$(16')\qquad \mu_3 = \Lambda_1 \cos\psi - \Lambda_2 \operatorname{sen}\psi\,;$$

basta quindi associare la (17) ad una qualunque delle (16) per avere le due μ rimanenti. Tutte e cinque le μ vengono così espresse come prodotti di $|\lambda|$ per dei coefficienti che sono funzioni di $\alpha \ldots \theta$ e delle loro derivate prime, e contengono inoltre i tre coefficienti d' attrito $f_s\ f_r\ f_i$. Un' espressione analoga avranno dunque le $\rho_\alpha \ldots \rho_\theta$ a cui volevamo pervenire, e che ora si calcolano immediatamente: difatti le (15) ci danno senz' altro ρ_α e ρ_β; ρ_ψ è data dalla (17), mentre, ottenute nel modo che s' è detto μ_1, μ_2, μ_3 si calcolerà ρ_φ e ρ_θ. Tenendo conto delle espressioni di Λ_1 e Λ_2, nonchè delle identità

$$u_x \cos\psi + u_y \operatorname{sen}\psi = \alpha' \cos\psi + \beta' \operatorname{sen}\psi + r\,\varphi' \operatorname{sen}\theta$$

$$u_x \operatorname{sen}\psi - u_y \cos\psi = \alpha' \operatorname{sen}\psi - \beta' \cos\psi - r\,\theta'$$

$$\omega_x \cos\psi + \omega_y \operatorname{sen}\psi = \theta'$$

$$\omega_x \operatorname{sen}\psi - \omega_y \cos\psi = \varphi' \operatorname{sen}\theta\,,$$

si hanno per ρ_φ e ρ_θ le formole seguenti:

$$p_\varphi = |\lambda| \left\{ -\operatorname{sen}\theta \left[\frac{f_s r}{u} (\alpha' \cos\psi + \beta' \operatorname{sen}\psi + r\varphi' \operatorname{sen}\theta) + \frac{f_r}{\omega r} \varphi' \operatorname{sen}\theta \right] \pm f_i \cos\theta \right\}$$

$$p_\theta = A\mu_2 = |\lambda| \left\{ \frac{f_s r}{u} (\alpha' \operatorname{sen}\psi - \beta' \cos\psi - r\theta') - \frac{f_r}{\omega r} \theta' \right\}.$$

La disuguaglianza (17') dovrà servire, dopo che si siano integrate le equazioni del movimento, a limitare l' indeterminazione che si ha nella soluzione, proveniente dall' aver introdotto nelle equazioni differenziali le forze d' attrito coi doppi segni.

9. Dopo aver visto come si possano esprimere le μ in funzione di λ nel caso che il movimento del solido in contatto col piano sia il più generale possibile, passeremo a studiare la medesima questione in alcuni casi in cui il moto del solido venga ulteriormente limitato, supponendo che dei tre moti elementari: rotolamento, strisciamento, imperniamento qualcuno non abbia luogo.

Supponiamo anzitutto che manchi il rotolamento (Prob. II). Come equazioni dei vincoli avremo ancora, come nel problema I, le (7) (7') (7''), colla differenza però che le $\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0$, coordinate del punto di contatto P del solido e del piano, indicheranno tre costanti e come tali dovranno rimanere nelle nostre equazioni [1]).

A rappresentare i vincoli potremo dunque assumere le (7) (7''), quando per $\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0$ si pongano tre costanti che verifichino la (7'), e in luogo delle $\alpha_s\, \beta_s\, \gamma_s$ si pongano le loro espressioni in funzione di $\psi\, \varphi\, \theta$. Le (7''), in cui i denominatori (costanti) saranno chiamati $F_1\, F_2\, F_3$, si possono scrivere:

$$F_2 (a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1) - F_1 (a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2) = 0$$

$$F_3 (a\alpha_1 + \ldots\ldots) - F_1 (a\alpha_3 + \ldots\ldots) = 0,$$

e introducendo tre nuove costanti col porre

$$\Phi_1 = \frac{F_1}{F_1\xi_0 + F_2\eta_0 + F_3\zeta_0}, \quad \Phi_2 = \frac{F_2}{F_1\xi_0 + \ldots}, \quad \Phi_3 = \frac{F_3}{F_1\xi_0 + \ldots},$$

1) Cfr. Maggi. Stereod., p. 26.

il sistema delle due ultime equazioni e della (7) si scrive

$$(18)\quad \begin{cases} a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 + \Phi_1(a\alpha + b\beta + c\gamma + d) = 0 \\ a\alpha_2 + \ldots\ldots + \Phi_2(a\alpha + \ldots\ldots\ldots) = 0 \\ a\alpha_3 + \ldots\ldots + \Phi_3(a\alpha + \ldots\ldots\ldots) = 0 . \end{cases}$$

Indicheremo ancora, come nel problema precedente, le $\alpha \ldots \theta$, prese in un certo ordine, con $x_1 \ldots x_6$: e ammetteremo che le (18) siano risolubili rispetto alle ultime tre x; assumeremo poi le tre prime come parametri indipendenti $q_1\, q_2\, q_3$, ed allora si ha:

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_s} \begin{cases} 1 . & (i = s) \\ 0 , & (i \text{ diverso da } s) \end{cases} \qquad (i, s = 1, 2, 3) .$$

Per le forze d' attrito ρ_i abbiamo quindi

$$\rho_i = \sum_{1}^{3}{}_s\, E_{is}\, \mu_s + \Sigma_s\, (E_{i4}\, b_{4s} + E_{i5}\, b_{5s} + E_{i6}\, b_{6s}) ,$$

che sono, in un certo ordine, le forze $\rho_\alpha \ldots \rho_\theta$. La riduzione delle azioni d' attrito ad una forza applicata nel punto P e ad una coppia si otterrà come nel probl. I.

Quello che importa notare nell' attuale problema è che, precisamente come nel caso prima studiato, si presentano, in generale, tutte e tre le azioni d' attrito, compresa la coppia d' attrito di rotolamento. Parrebbe a prima vista che, non essendovi moto di rotolamento, l' attrito non dovesse dare luogo alla resistenza corrispondente; tuttavia basta una osservazione semplicissima per comprendere quale sia la ragion d' essere di quella espressione che viene a figurare come attrito di rotolamento.

Si pensi a quello che sono, nel caso presente, le azioni vincolari. Concentrandole tutte nel punto P e ricordando che deve essere nullo il lavoro da esse eseguito per ogni spostamento virtuale del sistema, si trova che la forza risultante dev' essere normale al piano Π, mentre l' asse momento della coppia risultante è parallelo al piano medesimo. Mentre adunque nel problema I la coppia risultante era nulla, aggiungendo invece, al vincolo primitivo del contatto, la condizione che il solido non possa rotolare, si viene a introdurre una coppia come equivalente meccanico di questa condizione. Una tale coppia si presenta, naturalmente, anche quando non

vi è attrito, salvo a essere alterata quando l' attrito interviene; è la stessa cosa che succede della reazione normale che oppone il piano alla pressione del solido: per effetto dell'attrito questa reazione si altera, e la misura dell' alterazione è data da quell' espressione, che figura fra le azioni dovute all'attrito, e che fu indicata con R_z. Orbene, *la coppia che nel caso attuale compare come attrito di rotolamento,* ma che ora sarebbe inesatto designare con tal nome, *non è altro che l' alterazione subita dalla coppia vincolare (di rotolamento) per effetto dell' attrito.*

Per il calcolo delle μ procediamo allo stesso modo come nel problema I. Anzitutto, moltiplicando le (18) risp. per $\frac{\lambda_1}{\Phi_1}$, $\frac{\lambda_2}{\Phi_2}$, $\frac{\lambda_3}{\Phi_3}$ troviamo per le componenti della forza vincolare risultante:

$$\rho'_\alpha = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\,a\,, \quad \rho'_\beta = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\,b\,, \quad \rho'_\gamma = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\,c\,;$$

cioè questa forza, normale al piano Π, ha per grandezza $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$.

L' aumento ch' essa subisce in causa dell' attrito si ottiene dalle ρ_i, e noi lo chiameremo, come per l' addietro, R_z. Ponendo allora per brevità $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\lambda$, abbiamo da scrivere, in base all' esperienza, tre equazioni, cioè le (8) relative allo strisciamento e la (10) relativa all' imperniamento: si hanno cioè le stesse equazioni del prob. I, tolte però le due provenienti dal rotolamento. Le μ, in numero di tre, sono dunque legate a λ da altrettante equazioni, della cui discussione non è il caso qui d' occuparsi, in causa della perfetta analogia che l' attuale sistema presenta con quello che s' incontrò nel problema I.

Vi sarà poi da tener conto, oltre che della (10'), ancora di un' altra disuguaglianza di natura sperimentale, che deriva dalla mancanza del rotolamento. L' esperienza dice che se in un certo intervallo finito non vi ha rotolamento, cessano di valere le leggi che regolano il relativo attrito durante il moto; però sussiste una condizione per la coppia vincolare di rotolamento e quella introdotta dall' attrito: la somma geometrica

dei momenti delle due coppie si mantiene, durante tutto l'intervallo, minore o al più eguale al prodotto della pressione del solido contro il piano per il coefficiente d'attrito di rotolamento. È la cosìdetta legge dell'attrito al riposo, la quale non può essere utilizzata prima che si siano integrate le equazioni del movimento; dopo, il non verificarsi della disuguaglianza a cui dà luogo significherebbe che v'ha incompatibilità fra i dati del problema e l'ipotesi che il rotolamento manchi.

10. Come esempio riferiamoci ancora ad una sfera di raggio r in contatto con un piano fisso Π, che assumeremo come piano xy. Le equazioni dei vincoli (18) ora diventano

$$\gamma_1 + \frac{\xi_0}{r^2}\gamma = 0, \quad \gamma_2 + \frac{\eta_0}{r^2}\gamma = 0, \quad \gamma_3 + \frac{\zeta_0}{r^2}\gamma = 0,$$

da cui segue

(19) $$\gamma = \text{cost.} = r, \quad \varphi = \text{cost.}, \quad \theta = \text{cost.}$$

Come parametri indipendenti q si prenderanno quindi ψ, α, β, ed allora, tenuta presente l'espressione della forza viva data al n. 8, si trova per le forze d'attrito:

$$\rho_\alpha = M\mu_2, \quad \rho_\beta = M\mu_3, \quad \rho_\gamma = 0,$$
$$\rho_\psi = A\mu_1, \quad \rho_\varphi = A\cos\theta \,.\, \mu_1, \quad \rho_\theta = 0.$$

Facendo uso delle solite formole troviamo come espressioni definitive delle componenti dell'asse momento della coppia d'attrito le seguenti:

$$\rho_X = - M r \mu_3$$
$$\rho_Y = + M r \mu_2$$
$$\rho_Z = A\mu_1.$$

Anche qui l'attrito non dà luogo ad alcuna alterazione nella reazione normale del piano; invece altera l'asse momento della coppia vincolare di un segmento, parallelo al piano xy, le cui proiezioni sono ρ_X e ρ_Y.

Dalle equazioni (19) dei vincoli, moltiplicandole risp. per λ_1 λ_2 λ_3, otteniamo come reazione normale del piano

$$\rho'_\gamma = \lambda_1,$$

ed allora le equazioni che traducono le leggi sperimentali dell'attrito di strisciamento e di imperniamento sono

$$M\mu_2 = -f_s |\lambda_1| \frac{u_x}{u}, \qquad M\mu_3 = -f_s |\lambda_1| \frac{u_y}{u},$$

$$A\mu_1 = \pm f_i |\lambda_1|,$$

coll' aggiunta della condizione $\mu_1 \omega_z < 0$. Le tre equazioni sono già risolte rispetto alle μ, e ci danno pure immediatamente le espressioni cercate di $\rho_\alpha\ \rho_\beta\ \rho_\psi\ \rho_\varphi$. Se poi si sostituisce in ρ_X e ρ_Y, si trova

$$\rho_X = r f_s |\lambda_1| \frac{u_x}{u}$$

$$\rho_Y = -r f_s |\lambda_1| \frac{u_y}{u},$$

cioè la variazione subita dall'asse momento della coppia vincolare in causa dell' attrito è proporzionale al valore assoluto della pressione normale del solido contro il piano, ed è perpendicolare alla velocità del punto di contatto fra le due superficie.

11. In questo n. supporremo che sia maggiormente limitata la libertà di movimento del solido; ammetteremo cioè (Probl. III) che nel suo moto manchino lo strisciamento e l'imperniamento, cosicchè il solido si riduca esclusivamente a rotolare sul piano. Ciò equivale a supporre — 1°) che sia nulla in ogni istante la velocità, rispetto al piano, del punto di contatto P, — 2°) che in ogni istante sia nulla la rotazione del solido intorno alla normale al piano in P; queste ipotesi, conservando le notazioni dei numeri precedenti, si rappresentano colle equazioni [1])

$$(20)\quad \begin{cases} \alpha' + \omega_y (z_0 - \gamma) - \omega_z (y_0 - \beta) = h_x + \chi_y z_0 - \chi_z y_0 \\ \beta' + \omega_z (x_0 - \alpha) - \omega_x (z_0 - \gamma) = h_y + \chi_z x_0 - \chi_x z_0 \\ \gamma' + \omega_x (y_0 - \beta) - \omega_y (x_0 - \alpha) = h_z + \chi_x y_0 - \chi_y x_0 \\ a\,\omega_x + b\,\omega_y + c\,\omega_z = 0 . \end{cases}$$

1) Cfr. Maggi. op. cit., pag. 32.

Le $x_0\, y_0\, z_0$ s' intendono espresse in funzione delle $\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0$ e queste eliminate mediante le (7') (7"); inoltre ad $\omega_x\, \omega_y\, \omega_z$ s' intenderanno sostituite le loro espressioni (6'), per cui le (20) risultano lineari nelle $\alpha' \dots \theta'$: si ha così un esempio di sistema anolonomo, mentre nei problemi I e II s' aveva da fare con sistemi olonomi. Le equazioni dei vincoli sono risolubili rispetto ad $\alpha' \beta' \gamma' \varphi'$ [1]); si potranno quindi esprimere queste derivate in funzione di $\psi'\, \theta'$, che saranno da considerarsi come indipendenti, ed allora si avranno coll' usuale procedimento le forze d' attrito $\rho_\alpha \dots \rho_\theta$, le cui espressioni tralascieremo di scrivere per brevità.

Vi sarà da fare, sulle forze d' attrito, un' osservazione perfettamente analoga a quella che si fece nel problema precedente: accanto all' attrito di rotolamento si presentano pure quelli di strisciamento e d' imperniamento, sebbene il solido si limiti a rotolare. La cosa si spiega col pensare che in questo caso le reazioni vincolari consistono in una forza applicata in P che è, in generale, obbliqua al piano Π, e in una coppia il cui piano è parallelo a Π. La presenza di questa coppia e della componente tangenziale nella forza vincolare non dipende dall' attrito; però quelle due azioni possono venire alterate quando fra le due superficie a contatto si manifesti attrito, nel medesimo modo che questo altera, in generale, la reazione normale. Allora quelle espressioni che ci si presentano sotto forma d' attrito di strisciamento e d' imperniamento (e alle quali non converranno più queste denominazioni) danno precisamente le alterazioni che subiscono, in causa dell' attrito, la componente tangenziale della reazione vincolare e la coppia vincolare d' imperniamento.

Si avrebbe ora da scrivere le equazioni che esprimono le leggi sperimentali dell' attrito di rotolamento, e sono le due

1) L' ultima delle (20) scritta in disteso diventa:

$$c\,\psi' + [(a \operatorname{sen} \psi - b \cos \psi) \operatorname{sen} \theta + c \cos \theta]\, \varphi' + (a \cos \psi + b \operatorname{sen} \psi)\, \theta' = 0\,;$$

poichè $a\ b\ c$ non possono annullarsi tutti simultaneamente, la risoluzione di questa equazione rispetto a φ' è sempre possibile. Qualora però il piano Π nel suo moto non venisse mai, durante un intervallo finito, a disporsi parallelamente all' asse z, converrebbe risolvere rispetto a ψ', perchè allora le formole finali che danno le forze d'attrito risultano più semplici.

equazioni (9); d'altronde sono pure due le μ che si tratta di determinare, e la questione non presenta alcuna difficoltà. Oltre a queste due equazioni vi è poi da tener conto di due disuguaglianze, di quelle cioè che contengono le leggi dell'attrito al riposo per lo strisciamento e l'imperniamento. Esse dicono che la componente tangenziale della forza vincolare risultante e il momento della coppia vincolare d'imperniamento sono minori o al più eguali alla pressione del solido contro il piano moltiplicata risp. per f_s e f_i. È l'analogo di quanto già s'è visto nel problema II; non è dunque il caso che vi insistiamo.

Nel caso particolare che si tratti di una sfera in contatto col piano xy, le equazioni (20) dei vincoli si specializzano nelle seguenti:

$$(20') \quad \begin{cases} \alpha' + r\,\varphi' \cos\psi \operatorname{sen}\theta - r\,\theta' \operatorname{sen}\psi = 0 \\ \beta' + r\,\varphi' \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta + r\,\theta' \cos\psi = 0 \\ \gamma' = 0 \\ \psi' + \varphi' \cos\theta = 0\,, \end{cases}$$

e assumendo come caratteristiche del movimento φ' e θ', si hanno per le forze d'attrito $\rho_\alpha \ldots \rho_\theta$ le formole seguenti:

$$(21) \quad \begin{cases} \rho_\alpha = -\,\mathrm{M}\,r\,(\mu_1 \cos\psi \operatorname{sen}\theta - \mu_2 \operatorname{sen}\psi) \\ \rho_\beta = -\,\mathrm{M}\,r\,(\mu_1 \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta + \mu_2 \cos\psi) \\ \rho_\gamma = 0 \\ \rho_\psi = 0\,, \qquad \rho_\varphi = \mathrm{A}\,\mu_1 \operatorname{sen}^2\theta\,, \qquad \rho_\theta = \mathrm{A}\,\mu_2\,. \end{cases}$$

Le $\rho_\gamma = 0$ e $\rho_\psi = 0$ dicono che l'attrito non altera nè la resistenza normale del piano nè la coppia vincolare d'imperniamento; al contrario esso modifica la resistenza tangenziale, in quanto vi aggiunge una forza, le cui proiezioni sugli assi $x\,y$ sono $\rho_\alpha\,\rho_\beta$.

Quanto alle reazioni vincolari, la forza risultante ha per componenti (rispetto agli assi $x\,y\,z$) $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$, mentre l'asse momento della coppia (perpendicolare al piano $x\,y$) è uguale a λ_4, supposto che $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4$ siano i coefficienti di Lagrange per cui si moltiplicano ordinatamente le equazioni (20') dei vincoli.

Le equazioni sperimentali da cui si dovranno ricavare le μ in funzione delle λ sono

$$\rho_X = -fr\,|\lambda_3|\,\frac{\omega x}{\omega r}\,, \qquad \rho_Y = -fr\,|\lambda_3|\,\frac{\omega y}{\omega r}\;;$$

formando dalle (21) le espressioni di ρ_X e ρ_Y, e sostituendole nelle precedenti equazioni, si hanno due relazioni lineari in $\mu_1\,\mu_2$, dalle quali si ricava:

$$\frac{7}{5}\,M\,r^2\,\mu_1 = -\frac{fr}{\omega r}\,\varphi'\,|\lambda_3|$$

$$\frac{7}{5}\,M\,r^2\,\mu_2 = -\frac{fr}{\omega r}\,\theta'\,|\lambda_3|\,.$$

12. Non val la pena di esaminare i problemi rimanenti che risulterebbero supponendo che mancasse qualcuno dei moti elementari del solido rispetto al piano; i risultati a cui si giungerebbe sono perfettamente conformi, per la parte che ci interessa, a quelli trovati nei problemi che abbiamo trattato.

Limitiamoci, terminando, ad osservare che i tre problemi studiati, come sono strettamente legati fra loro dal punto di vista meccanico, così anche dal lato analitico si possono mettere in relazione l' uno coll' altro. Riferendoci, ben inteso, alle sole resistenze, possiamo dire che rispetto alle reazioni vincolari il prob. I è un caso particolare tanto del II quanto del III, mentre rispetto alle reazioni d' attrito gli ultimi due rientrano entrambi nel primo. Ed invero basta richiamare quello che si è notato nell' introduzione, che aggiungendo ad un sistema nuovi vincoli, aumenta il numero dei parametri λ, mentre diminuisce di altrettanto quello dei parametri μ; per cui dev'essere possibile, ponendo i μ del dato sistema eguali a opportune combinazioni di quelli del sistema ottenuto coll'aggiunta dei nuovi vincoli, passare, dalle forze d' attrito relative al primo, a quelle spettanti al secondo sistema; mentre inversamente dovrà potersi passare dalle forze vincolari del secondo sistema a quelle del primo prendendo, come parametri λ del primo, delle combinazioni lineari dei λ che si riferiscono al secondo. La cosa si verifica assai facilmente, tanto più se pren-

diamo addirittura il caso della sfera in contatto con un piano fisso.

Confrontando le forze d'attrito nei problemi I e II, si vede che si identificano le prime colle seconde facendo nelle prime $\mu_2 = \mu_3 = 0$, e leggendo poi μ_2 e μ_3 in luogo di μ_4 e μ_5. Per passare alle forze d'attrito del problema III basterà porre, indicando con μ'_1 e μ'_2 le μ di quest'ultimo:

$$\mu_1 = -\mu'_1 \cos\theta\,, \quad \mu_2 = \mu'_1\,, \quad \mu_3 = \mu'_2\,,$$

$$\mu_4 = -r(\mu'_1 \cos\psi \operatorname{sen}\theta - \mu'_2 \operatorname{sen}\psi)\,, \quad \mu_5 = -r(\mu'_1 \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta + \mu'_2 \cos\psi),$$

e le relazioni intercedenti fra le $\mu_1 \ldots \mu_5$ in seguito all'aggiunta dei nuovi vincoli non sono altro che quelle che risultano eliminando μ'_1 e μ'_2 fra le ultime cinque equazioni.

D' altra parte la considerazione delle forze vincolari permette di fare rientrare il prob. I in II e III. Difatti in quel problema, delle sei forze vincolari $\rho_\alpha \ldots \rho_\theta$ l'unica diversa da zero è la ρ'_γ, che è uguale a λ. In II invece, moltiplicando le equazioni (19) dei vincoli ordinatamente per λ_1 λ_2 λ_3, troviamo

$$\rho'_\alpha = \rho'_\beta = \rho'_\psi = 0\,, \quad \rho'_\gamma = \lambda_1\,, \quad \rho'_\varphi = \lambda_2\,, \quad \rho'_\theta = \lambda_3\,,$$

e quindi si ritrovano le forze vincolari di I col porre semplicemente

$$\lambda_1 = \lambda\,, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0\,.$$

Inoltre le forze vincolari del prob. III si ottengono dalle equazioni (20') dei vincoli moltiplicate risp. fra $\lambda_1 \ldots \lambda_4$, e sono

$$\rho'_1 = \lambda_1\,, \quad \rho'_2 = \lambda_2\,, \quad \rho'_3 = \lambda_3\,, \quad \rho'_4 = \lambda_4\,,$$
$$\rho'_5 = r \operatorname{sen}\theta\,(\lambda_1 \cos\psi + \lambda_2 \operatorname{sen}\psi) + \lambda_4 \cos\theta$$
$$\rho'_6 = -r\,(\lambda_1 \operatorname{sen}\psi - \lambda_2 \cos\psi)\,;$$

anche qui il passaggio al problema I è immediato, non avendosi che da porre

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0\,, \quad \lambda_3 = \lambda.$$

COPPIE DESTATE SU UNA SFERA CONDUTTRICE DA UN CAMPO ROTANTE.

Ricerche del Dott. O. M. CORBINO [1]).

1. La determinazione della coppia necessaria per far rotare una sfera conduttrice in un campo uniforme, coppia eguale a quella destata sulla sfera in quiete da un campo rotante, con eguale velocità, costituisce un problema purtroppo ancora insoluto malgrado la sua apparente semplicità.

Le più antiche ricerche teoriche sull'argomento, dovute al Prof. Felici, erano state proseguite dal Jochmann, il quale. però, dovè supporre, per semplicità, la velocità di rotazione molto piccola, in modo da potere trascurare gli effetti dell'autoinduzione.

Altre ricerche teoriche e sperimentali sono riassunte a pag. 517 (B. IV) del trattato del Wiedemann; ma non vi si trova menzionata, come neanche in molti lavori successivi, una magistrale memoria di Hertz [2]), il quale si propose di risolvere il problema completamente nel caso che il corpo considerato sia una sfera piena o cava, che i magneti siano fuori o dentro la sfera cava, e che la sfera stessa abbia o no proprietà magnetiche.

Malgrado il poderoso studio dell' Hertz, riflettente l'azione di un campo qualsiasi sulla sfera e molti casi particolari, il problema non è completamente risoluto neanche per un campo uniforme. Le formole cui egli perviene sono infatti calcolabili solo nel caso di uno strato sferico sottilissimo; mentre per la sfera piena lo sono soltanto nei casi limiti di velocità piccolissime o grandissime.

Resta sconosciuto il comportamento della sfera, dal punto di vista quantitativo, entro limiti molto estesi di frequenza, poichè la velocità di 5000 giri al secondo non è ancora abba-

1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Palermo, diretto dal Prof. D. Macaluso.

2) Hertz. Ueber die Induktion in rotierenden Kugeln. Inaugural - Dissertation. Berlin, Gesammelte Werke, Bd. 1°, pag. 87.

stanza grande perchè si possa applicare la formola relativa alle grandi velocità, mentre l'altra è valida solo per pochi giri a secondo.

È quindi di grande interesse ricercare sperimentalmente il valore della coppia per tali velocità intermedie; ciò forma appunto l'oggetto delle presenti ricerche, nelle quali viene misurata la coppia destata su sfere di metalli diversi da campi rotanti con velocità comprese tra 500 e 6000 giri al secondo.

2. Credo necessario richiamare anzitutto i risultati principali della teoria di Hertz per precisare il campo di applicabilità delle sue formole, e dedurne una legge molto importante e semplice che è valida per qualunque velocità. Stabilito un sistema di assi ortogonali, col centro nel centro della sfera e con l'asse z secondo l'asse di rotazione e detta Ψ la *funzione di corrente* nel senso dell'Helmholtz, dalla quale dipendono le componenti della densità di corrente u, v, w in un punto qualunque della sfera, il calcolo della Ψ vien fatto sviluppando secondo funzioni sferiche il potenziale dei magneti χ e le correnti che ne derivano.

Tale sviluppo si riduce a un termine quando il campo è uniforme e normale all'asse z; noi supporremo di essere in questo caso per semplificare l'interpretazione delle formole che rappresentano senza di ciò il termine generale di una serie.

Nel § 4 l'Hertz tratta il caso di una sfera piena o di spessore finito; comincia col dimostrare che le correnti sviluppate per la rotazione della sfera circolano secondo superficie sferiche aventi per centro l'origine; e quindi calcola la Ψ per mezzo di due funzioni ausiliarie f_1 e f_2 di grande importanza nello sviluppo ulteriore del lavoro. Dalla espressione di Ψ si può dedurre che l'autoinduzione, di cui l'autore non aveva tenuto conto nei primi paragrafi, lascia inalterata la forma delle linee di corrente, mentre produce i seguenti effetti:

1° di far rotare tutti i fenomeni di un certo angolo δ nel senso della rotazione della sfera; l'angolo δ è diverso per i vari strati e tale che tang $\delta = \frac{f_2}{f_1}$;

2° di attenuare l'intensità delle correnti in diversa misura nei vari strati, cosicchè in ogni strato la corrente sta nel rapporto

$$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} : 1$$

con quella calcolata senza tener conto dell'autoinduzione.

3. La determinazione di f_1 ed f_2, funzioni del raggio vettore ρ di ogni punto interno alla sfera, della velocità di rotazione ω e della resistenza specifica x del materiale di cui è fatta la sfera, è molto laboriosa. Indicando con r ed R i valori estremi del raggio vettore nell'involucro sferico, (O ed R per la sfera piena), e posto

$$\frac{4\pi\omega}{x} = \mu^2; \quad \mu r = s; \quad \mu\rho = \sigma; \quad \mu R = S$$

ed infine indicando con λ_1 e λ_2 le due radici dell'equazione $\lambda^4 = -1$ aventi positive le parti reali, allora le f_1 e f_2 possono esprimersi per mezzo di altre funzioni p e q calcolabili per i successivi termini dello sviluppo in funzioni sferiche con l'aiuto di due formole ricorrenti.

Le f si possono esprimere, in ultimo, a mezzo delle sole q e precisamente, nel caso di un campo uniforme normale all'asse z, la f_1 e la f_2 sono rispettivamente i coefficienti della parte reale e della parte immaginaria dell'espressione:

$$\frac{3}{2}\,\frac{q_2(\lambda\sigma)\,q_1(-\lambda\sigma) - q_2(-\lambda\sigma)\,q_1(\lambda\sigma)}{q_2(\lambda s)\,q_0(-\lambda S) - q_2(-\lambda s)\,q_0(\lambda S)}$$

ove le q hanno i valori seguenti

$$q_0(\sigma) = \frac{e^{-\sigma}}{\sigma}; \quad q_1(\sigma) = -\frac{2e^{-\sigma}}{\sigma^2}\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)$$

$$q_2(\sigma) = \frac{4e^{-\sigma}}{\sigma^3}\left(1 + \frac{3}{\sigma} + \frac{3}{\sigma^2}\right).$$

Nel caso di piccole velocità di rotazione si ha, tenendo conto delle sole prime potenze della velocità medesima nello sviluppo delle f,

$$\text{(1)} \qquad \text{arc tang}\,\frac{f_2}{f_1} = \delta = -\frac{2\pi\omega}{x}\left(\frac{R^2}{3} - \frac{\rho^2}{5}\right)$$

mentre per velocità grandissime, quando si possa trascurare $\frac{1}{\sigma}$ di fronte a 1, si ha

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{f_2}{f_1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\rho)$$

e

$$\sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \frac{3}{\mu} \frac{R}{\rho^2} e^{-\frac{\mu}{\sqrt{2}}(R-\rho)} \qquad (2)$$

il che permette di determinare la Ψ.

Le formole ottenute lasciano prevedere i fenomeni che devono prodursi al crescere della velocità nei seguenti termini:

Cominci l' autoinduzione a divenire notevole; allora non si altera la forma delle curve di corrente nei singoli strati, ma esse cominciano ad apparir rotate nel senso della rotazione, specialmente negli strati interni; la rotazione in questi è senza limiti, mentre quella dello strato esterno converge verso il limite finito $\frac{\pi}{4}$.

Se la velocità di rotazione è molto grande, il luogo dei punti corrispondenti dei diversi strati è una spirale di Archimede, con un numero di spire crescente indefinitamente a misura che aumenta la velocità di rotazione.

L' intensità aumenta in principio con la velocità di rotazione, più rapidamente negli strati esterni che negli interni; nei più esterni aumenta sempre, negli altri raggiunge per una certa velocità di rotazione un massimo, al di là torna a diminuire. Per grandi valori di ω essa diminuisce dall'esterno all' interno come una funzione esponenziale il cui esponente contiene $\sqrt{\omega}$.

4. Nel § 5 l' Hertz ricerca le forze necessarie per mantenere in rotazione la sfera, desumendole dal calore sviluppato dalle correnti indotte.

Nel caso da noi considerato tale calore è espresso da

$$(3) \qquad W = \frac{\omega^2}{x} \frac{A^2}{2} \int_0^R \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 (f_1^2 + f_2^2) \rho^2 d\rho$$

e da questa si può avere direttamente il momento della coppia D:

$$D = \frac{W}{2\pi\omega}.$$

Nel caso di velocità piccolissime, per cui sia $f_1 = 1$, e $f_2 = 0$ si ha dunque

$$(4) \qquad D = \frac{\omega}{2\pi x} \frac{A^2}{10} R^5$$

e invece per grandissime velocità, per cui vale la (2) si ha

$$(5) \qquad D = \frac{A^2}{8\pi^2} \sqrt{\frac{x}{2\pi\omega}}.$$

Cosicchè, se si fa girare il campo esterno con velocità ω, si eserciterà sulla sfera una coppia che per piccoli valori di ω aumenta proporzionalmente a $\frac{\omega}{x}$ mentre per grandi valori di ω diminuisce al crescere di ω, e precisamente è proporzionale a $\sqrt{\frac{x}{\omega}}$, fino ad annullarsi per ω grandissimo.

Esclusi questi casi estremi, la formola non è calcolabile per le velocità intermedie; e anzi l'ultima ipotesi, che conduce al risultato paradossale di una coppia crescente indefinitamente al crescere della resistenza specifica, si riferisce a un caso praticamente irrealizzabile. Esso presuppone infatti che sia $\sigma = \mu\rho$ molto grande di fronte a 1. Ora a parte che ciò non potrà mai avvenire nelle regioni prossime al centro di una sfera massiccia, non avviene neanche per $\rho = R$, pur supponendo la sfera di rame di 2 cm. di diametro e il numero di giri eguale a 5000 per secondo. Posto infatti $R = 10$ mm. e $x = 200000$ per il rame (si adottano con ciò le unità adoperate dall' Hertz) si ha

$$\mu^2 = \frac{4\pi\omega}{x} = \frac{4\pi \cdot 2\pi \cdot 5000}{200000}$$

e quindi

$$\mu = 1{,}4$$

e

$$\mu R = 14$$

Or 1/14 non è invero trascurabile di fronte a 1, e molto meno lo sarà per velocità minori, dentro la sfera, e con metalli molto più resistenti del rame.

5. Un risultato molto interessante possiamo pur tuttavia ricavare dalla teoria di Hertz.

La coppia, nel caso più generale, ha per fattore il rapporto $\frac{\omega}{x}$, e contiene le funzioni f_1 e f_2 le quali sono esprimibili per mezzo delle q; queste alla loro volta son funzioni di ρ e della grandezza μ dipendente dal rapporto $\frac{\omega}{x}$.

In ultima analisi, quindi, se la formola fosse sviluppabile, conterrebbe, per quanto in forma complicata, il raggio R e il rapporto $\frac{\omega}{x}$. Si può quindi enunciare la seguente legge:

Per un determinato raggio la coppia è funzione soltanto del rapporto tra la velocità di rotazione e la resistenza specifica del conduttore, cosicchè essa acquisterà lo stesso valore se si altera la velocità e la resistenza nella stessa misura.

Si avrà quindi la stessa coppia per una sfera di stagno a 500 giri e per una sfera eguale di bismuto a 5000 giri, se la resistenza del bismuto è decupla di quella dello stagno.

6. Tolta la legge enunciata, nessuna altra previsione quantitativa può farsi sulla base della teoria di Hertz; e, d' altra parte, finchè si tratta di prevedere l' andamento generale del fenomeno, può dare sufficienti lumi un ragionamento diretto. Le correnti indotte nella sfera si localizzano, per lo skin-effect, negli strati esterni, penetrando tanto più profondamente quanto minore è la frequenza e maggiore la resistenza specifica.

Può quindi avvenire che malgrado esse siano più intense negli strati esterni di una sfera di rame, si abbiano coppie più energiche con un metallo di maggior resistenza, perchè un maggior numero di strati viene impegnato nel fenomeno; ma si intende che un accrescimento ulteriore di resistenza possa far diminuire la coppia se già tutti gli strati fino al centro erano abbastanza impegnati; si può ancora prevedere che per una certa frequenza la resistenza specifica cui corrisponde la massima coppia debba esser tanto più elevata quanto maggiore è il raggio della sfera.

Alcune di queste conseguenze ho potuto verificare con la esperienza, servendomi di campi rotanti con velocità variabili da 500 a 6000 giri per secondo. Comincerò con l'esporre il metodo seguito per la creazione del campo e quindi i risultati delle esperienze eseguite con sfere di tre metalli: rame, stagno e bismuto, aventi le resistenze rispettive 1, 8, 80.

7. In un lavoro precedente [1]) ebbi a indicare un metodo per la produzione di campi rotanti a mezzo delle correnti di Duddel; esso è stato seguito in massima nelle presenti ricerche.

I circuiti 1 e 2 (fig. 1) hanno in presenza una parte con un coefficiente di induzione mutua M; in G agisce un arco voltaico che determina nel sistema 1 delle correnti di Duddel.

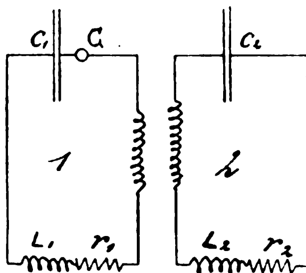


Fig. 1.

Rendendo queste correnti sinusoidali, e scegliendo l'autoinduzione L_2 e la capacità C_2 in modo che il periodo proprio

1) Corbino. Sulla produzione di campi rotanti per mezzo di correnti di scarica sinusoidali o smorzate. Atti A. E. I. Dic. 1903. — N. Cim. S. 5., t. 7, pag. 175, 1904.

del sistema 2 sia eguale a quello delle correnti circolanti nel sistema 1, allora le tensioni esistenti agli estremi di L_2 e di C_2 si compensano in ogni istante, e il circuito 2 si comporta come se fosse costituito dalla sola resistenza r_2; la corrente i_2 sarà quindi in fase con la f. e. m. indotta dalle corrente i_1 del sistema 1, e quindi in quadratura con i_1. Se si vuole che anche l'intensità massima I_2 sia eguale all'intensità massima I_1 basterà disporre le cose in modo da aversi

$$M \omega = r_2 .$$

Le due correnti i_1 e i_2 potranno dunque servire per la produzione di un campo rotante quando esse traversino due bobine identiche disposte in piani ortogonali.

Collocando opportunamente un tubo di Braun con l'asse normale agli assi delle due bobine si disegnerà sul disco fluorescente, in generale, un'ellisse ad assi inclinati; essa si orienterà con gli assi principali secondo gli spostamenti prodotti dalle due bobine, se il periodo proprio del sistema 2 è rigorosamente eguale a quello delle correnti inducenti; e diverrà un cerchio, in quest'ultimo caso, se sarà soddisfatta l'ultima relazione.

8. In pratica però le cose non vanno così semplicemente. La minima differenza tra il periodo proprio del sistema 2 e quello delle correnti inducenti distrugge il compenso tra la tensione agli estremi di L_2 e quella agli estremi di C_2; ne risulta che tra i_1 e i_2 non si ha più la differenza di fase di 90° e sul disco apparisce una ellisse ad assi inclinati.

La curva segue con grande squisitezza le minime variazioni di L_2, di C_2 o di ω; ottenuto, per esempio, il cerchio o una figura molto prossima ad un cerchio, essa si deforma incessantemente per le minime, ma inevitabili, variazioni del suono dell'arco e quindi del periodo delle correnti principali, come pure per una piccola variazione di L_2 e di C_2.

Una seconda perturbazione, analoga a quella che ebbi a riferire altra volta, si ha in ciò che quando il periodo proprio del sistema 2 è minore di quello della corrente inducente, la curva cambia natura presentando delle vere rientranze e dei

gomiti bruschi, fino a dare le curve intrecciate caratteristiche della composizione di vibrazioni di diverso periodo; inoltre in prossimità della eguaglianza dei periodi l' arco si incanta bruscamente e non è possibile ristabilirne le vibrazioni.

Per vincere quest' ultimo ostacolo ho trovato utilissimo ricorrere a due archi in serie anzichè a uno solo.

Dopo alquanti tentativi ottenni un campo quasi circolare, ma era molto difficile averlo per diverse frequenze; invece era molto più agevole avere una figura di forma quasi ellittica, ma ben definita. Ora per il mio scopo un campo ellittico poteva servire egualmente come un campo circolare, potendosi decomporre il primo in un campo circolare di raggio eguale all' asse minore più un campo rettilineo oscillante secondo l' asse maggiore e che, per conto proprio, non determina alcuna coppia su una sfera metallica.

Malgrado i più pazienti ritocchi non fu tuttavia possibile ottenere, a frequenze elevate, curve veramente ellittiche, da cui poter dedurre l' intensità del campo rotante circolare.

Il campo subiva a quelle frequenze, durante la rotazione, notevoli ed irregolari variazioni di intensità, rivelando la non sinusoidalità della corrente principale; ciò rendeva illusorie le misure fatte sulla curva, pur restando degni di fede, come vedremo, i risultati relativi al confronto di *metalli diversi* per ciascuna frequenza.

9. Per potere stabilire fino a qual punto siano attendibili, con campi non ellittici, le misure relative a diversi metalli per una determinata frequenza occorre tener presente la vera forma delle correnti di Duddel. Tale forma, come fu da me dimostrato altrove [1]), è quella di una sinusoide in cui la cresta sia troncata e vi sia sostituito un tratto rettilineo, in modo da risultarne il diagramma A B D H L M I (fig. 2) nel quale il tratto H L M I è eguale, sebbene spostato, al tratto D E F G, e l'area A B D H U è eguale all' area della mezza sinusoide.

1) Corbino. Sul meccanismo di produzione delle correnti di Duddel. Atti A. E. I. Ottobre 1908.

Il periodo complessivo è perciò maggiore di quello della sinusoide, secondo il rapporto:

$$K = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} + \text{arc sen}\,\frac{b}{a}\right)$$

ove a indica l'ampiezza della sinusoide e b l'ordinata corrispondente alla troncatura.

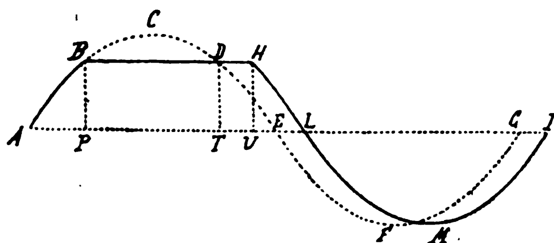


Fig. 2.

Posto $AI = 2\pi$, il diagramma ABDHLMI ha una rappresentazione analitica semplice nei tre intervalli AP, PU, UI.

Si ha infatti, posto

$$AP = \alpha, \quad AU = \beta$$

e indicando con y l'intensità corrispondente all'ascissa x,

tra	$x = 0$	e	$x = \alpha$	$y = a \text{ sen } Kx$
tra	$x = \alpha$	e	$x = \beta$	$y = b$
tra	$x = \beta$	e	$x = 2\pi$	$y = a \text{ sen } (Kx - 2K\pi)$

come è facile vedere.

Riesce quindi agevole esprimere la funzione y in tutto l'intervallo $0 - 2\pi$ per mezzo di una serie di Fourier della forma

$$y = A_1 \text{ sen } x + A_2 \text{ sen } 2x + A_3 \text{ sen } 3x + \ldots$$
$$+ B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + \ldots$$

poichè è facile calcolarsi i coefficienti dello sviluppo

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \operatorname{sen} m x \, d x$$

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos m x \, d x .$$

Si ha infatti

$$\int_0^{2\pi} y \operatorname{sen} m x \, d x = a \int_0^{\alpha} \operatorname{sen} K x \operatorname{sen} m x \, d x + b \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{sen} m x \, dx +$$

$$+ a \int_{\beta}^{2\pi} \operatorname{sen} (K x - 2 K \pi) \operatorname{sen} m x \, d x =$$

$$= \frac{1}{2} a \left[\frac{\operatorname{sen} (K - m) x}{K - m} - \frac{\operatorname{sen} (K + m) x}{K + m} \right]_0^{\alpha} - \frac{b}{m} \left[\operatorname{sen} m x \right]_{\alpha}^{\beta} +$$

$$+ \frac{1}{2} a \left[\frac{\operatorname{sen} [(K - m) x - 2 K \pi]}{K - m} - \frac{\operatorname{sen} [(K + m) x - 2 K \pi]}{K + m} \right]_{\beta}^{2\pi} .$$

In modo analogo si svilupperebbe l' integrale che occorre per il calcolo di B_m.

Con una serie di semplici trasformazioni, destinate a dare alle formole una forma comoda per il calcolo numerico si viene al seguente risultato: posto

$$P_m = \left(\pi - \frac{\beta - \alpha}{2} \right) K + m \frac{\beta - \alpha}{2} \; ; \; Q_m = \left(\pi - \frac{\beta - \alpha}{2} \right) K + m \frac{\beta + \alpha}{2}$$

$$R_m = \left(\pi - \frac{\beta - \alpha}{2} \right) K - m \frac{\beta - \alpha}{2} \; ; \; S_m = \left(\pi - \frac{\beta - \alpha}{2} \right) K - m \frac{\beta + \alpha}{2}$$

si ha

$$\pi A_m = a \frac{\operatorname{sen} P_m \cos Q_m}{K - m} - a \frac{\operatorname{sen} R_m \cos S_m}{K + m} + 2 \frac{b}{m} \operatorname{sen} m \frac{\beta + \alpha}{2} \operatorname{sen} m \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\pi B_m = a \frac{\operatorname{sen} P_m \operatorname{sen} Q_m}{K - m} - a \frac{\operatorname{sen} R_m \operatorname{sen} S_m}{K + m} + 2 \frac{b}{m} \cos m \frac{\beta + \alpha}{2} \operatorname{sen} m \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Queste formole si prestano facilmente al calcolo, poichè si passa da P_m, Q_m, ecc. a P_{m+1}, Q_{m+1}, ecc. aggiungendo o togliendo $\frac{\beta-\alpha}{2}$ o $\frac{\beta+\alpha}{2}$.

Si dimostrano inoltre facilmente le seguenti relazioni

$$\beta-\alpha=\frac{2}{K}\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\,; \qquad \beta+\alpha=\frac{2K-1}{K}\pi\,.$$

Per le correnti da me impiegate era $\frac{b}{a}$ non inferiore a $\frac{4}{5}$, nel caso delle alte frequenze; posto appunto $b=4$ e $a=5$, risulta dalla (6)

$$K=1{,}034$$

cioè un' alterazione del periodo di circa $^1/_{30}$.

Si ha perciò nel caso attuale

$$\frac{\beta-\alpha}{2}=42^0.32'\,; \qquad \frac{\beta+\alpha}{2}=95^0.7'\,.$$

E quindi per gli angoli P_1, Q_1, R_1, S_1, da adoperare nel calcolo di A_1 e B_1 si ha

$$P_1 = 4^0.40'\,; \qquad Q_1 = 2^0.53'$$
$$R_1 =-80^0.23'\,; \qquad S_1 =-187^0.22'$$

da cui si può passare facilmente ai valori necessari per il calcolo dei coefficienti successivi.

I risultati, estesi fino al sesto armonico, sono riportati nel seguente quadro, nel quale l' ultima colonna contiene le ampiezze dei successivi armonici

	A_m	B_m	$A^2_m + B^2_m$	$\sqrt{A^2_m+B^2_m}$
1	4,265	0,137	18,21	4,27
2	1,111	−0,987	2,21	1,49
3	0,234	0,362	0,186	0,43
4	−0,050	0,644	0,415	0,65
5	−0,062	−0,011	0,004	0,06
6	0,217	0,367	0,182	0,43

Come si vede, malgrado la troncatura sia piuttosto lieve e il periodo molto prossimo a quello corrispondente alla sinusoidalità, gli armonici successivi son lungi dall' essere trascurabili. Per formarsene un' idea netta occorre ricercare quale frazione dell' energia totale è trasportata dall' onda fondamentale; e perciò calcolare l' energia totale.

Or, a parte una costante, si ha per quest' ultima

$$W = \int_0^{2\pi} y^2 dx = a^2 \int_0^{\alpha} \text{sen}^2 Kx dx + b^2(\beta - \alpha) + a^2 \int_{\beta}^{2\pi} \text{sen}^2 (Kx - 2K\pi) dx$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[2\pi - (\beta - \alpha)\right] - \frac{a^2}{4K}\left[\text{sen} 4K\pi - 2 \text{sen} K(\beta - \alpha) \cos K(\beta + \alpha)\right] + b^2 (\beta - \alpha)$$

cioè, nel caso preso in considerazione,

$$W = 22\pi .$$

La stessa energia sarebbe sviluppata da una corrente sinusoidale del periodo della fondamentale e avente per quadrato dell' ampiezza 22. Adunque l' onda fondamentale trasporta i $\frac{18,2}{22}$ dell' energia totale, il che ci dà un' idea esatta della portata complessiva di tutti gli altri armonici.

10. Ben altra cosa avviene della corrente indotta nel sistema 2. Chiamato M il coefficiente di induzione mutua, e I_1, I_2 . . . . I_m le ampiezze dei successivi armonici della corrente inducente, le rispettive forze elettromotrici indotte nel circuito 2 saranno

$$M\omega I_1, \quad 2M\omega I_2, \quad 3M\omega I_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; mM\omega I_m .$$

A queste diverse f. e. m. il sistema 2 oppone resistenze apparenti diverse. Tale resistenza, data per l' m-esimo armonico da

$$\sqrt{\left(L_2 m\omega - \frac{1}{C_2 m\omega}\right)^2 + r_2^2}$$

è eguale a r_2 per il primo armonico della corrente indotta se il periodo proprio del sistema 2 è eguale a quello del fonda-

mentale della corrente inducente, mentre diventa molto grande per gli armonici superiori.

Nel mio caso era $r_2 = 0,5$ ohm mentre era $L_2 = 0,81$ millihenry; alla frequenza 3000 le resistenze apparenti per i successivi armonici erano quindi le seguenti:

1	2	3	4	5	6
r_2	$\frac{3}{2} L_2 \omega$	$\frac{8}{3} L_2 \omega$	$\frac{15}{4} L_2 \omega$	$\frac{24}{5} L_2 \omega$	$\frac{35}{6} L_2 \omega$
0,5	22	40	56	72	87

le ampiezze degli armonici successivi della corrente indotta staranno quindi come

954	13	3	4	0,4	2,4

e le energie relative come

1000000	271	10	17,6	0,17	6,33.

Se si confrontano questi numeri con quelli esprimenti le energie degli armonici nella corrente inducente, cioè coi numeri

1821	221	19	41	0,4	18

si vede che la corrente nel sistema 2 è molto purificata degli armonici superiori, cosicchè essa si può considerare praticamente come sinusoidale.

Inoltre mentre per l' onda fondamentale la corrente è in fase con $M \frac{di_1}{dt}$, cioè con la f. e. m. e quindi in quadratura con I_1, per gli armonici superiori la resistenza ohmica r_2 è trascurabile di fronte alla resistenza induttiva $L_2 m\omega - \frac{1}{C_2 m\omega}$ e quindi la corrente è in quadratura con $M \frac{di_m}{dt}$ e perciò in fase con I_m. Ne consegue che *solo l' onda fondamentale nel sistema 2 darà un campo rotante con la corrispondente del sistema 1, mentre le altre componenti saranno molto deboli, non solo, ma daranno un campo oscillante rettilineo.*

Nel caso più generale in cui il periodo proprio del sistema 2 non sia esattamente dell' onda fondamentale del sistema 1,

e quindi del suono dell' arco, ma abbastanza prossimo ad esso, ne risulterà un indebolimento del 1° armonico indotto e una differenza di fase non esattamente di 90°. Ma in ogni caso noi potremo sempre ridurre il campo risultante a un campo circolare e a un campo rettilineo non sinusoidale *di nessun effetto sulla coppia che subisce la sfera rotante* ma che può deformare anche notevolmente la curva ottenuta al tubo di Braun.

Ciò vale ancora, si noti bene, anche se la corrente principale fosse di forma diversa di quella supposta, e ne risultasse una curva assolutamente irregolare. Ecco perchè nel caso di frequenze elevate, avendo trovato delle curve che non erano delle buone ellissi, e in qualche caso neanche mediocri, ho creduto prudente non eseguire misure sulle curve, per dedurne l' intensità del campo circolare, pur conservando fede ai valori ottenuti per le coppie relative *alla stessa curva* e a metalli diversi.

Nella esposizione della parte sperimentale sarà appunto riferito un caso tipico a questo riguardo, e che dimostra come i numeri ottenuti per le coppie relative a due metalli diversi e a una curva non buona conservano un rapporto inalterato migliorando la curva, mentre nessuna relazione si ha con le misure fatte su questa per ciò che si riferisce alla legge indiscutibile della proporzionalità al quadrato del campo.

11. Rinunziando adunque, almeno per le frequenze più alte, alla misura dell' intensità del campo, le esperienze venivano condotte nella maniera seguente.

Le due bobine L_1 e L_2, identiche e dell' induttanza di 0,54 millihenry circa, erano disposte su due sostegni con gli assi orizzontali e ortogonali.

Il diametro interno della gola della bobina era di cm. 7; cosicchè la distribuzione del campo era presso a poco uniforme anche alquanto fuori dell' asse.

Nel punto di incrocio degli assi, e a eguale distanza dalle due bobine si poteva disporre o il tubo di Braun diretto verticalmente, ovvero una sfera metallica di 2,05 cm. di diametro sospesa a un filo di ottone dello spessore di $^2/_{10}$ di millimetro.

Uno specchietto fissato al filo serviva per la misura delle deviazioni, contrastate dalla torsione del filo medesimo. Le sfere, tutte di eguale diametro, erano completamente piene, e portavano due cappelletti di ebanite, fissati con mastice, agli estremi di un diametro; all' uno era attaccato l' uncino per la sospensione, all' altro un filo metallico portante all' estremo inferiore una lastrina di vetro.

Questa pescava in una bacinella d' acqua e funzionava da smorzatore. Ogni sfera era munita del suo uncino e del suo smorzatore, cosicchè la sostituzione di una sfera a un' altra poteva farsi rapidamente.

Si cominciava a disporre delle costanti dei circuiti in modo che la curva osservata al tubo di Braun abbracciasse una certa area; accorciando progressivamente e lentamente i due archi la curva si andava facendo più regolare, accostandosi alla forma ellittica, mentre il suono montava in altezza, finchè, all' istante in cui gli archi si incantavano, il suono raggiungeva un' altezza limite e la curva una forma ben determinata.

Se non si era moltissimo lontani dalla forma ellittica si faceva con l' aiuto di un prisma a riflessione totale e di un cannocchiale munito di micrometro oculare, la misura dell' asse minore; si sostituiva allora al tubo la prima pallina; si determinava la posizione di riposo, poscia si mettevano in azione gli archi, accorciandoli come prima progressivamente e lentamente; la deviazione della pallina seguiva quasi aperiodicamente le variazioni del suono e quando si raggiungeva l' altezza limite, poco prima che il suono cessasse, acquistava un certo valore che si trovava quasi lo stesso ripetendo più volte l' esperienza.

Quindi si passava alle altre sferette, e alla fine si ritornava alla prima per verificare se durante la serie si fosse prodotto qualche cambiamento.

La stessa operazione si ripeteva per le diverse frequenze.

12. *Prima Esperienza.* — Per frequenze molto basse non potevo servirmi del dispositivo descritto, occorrendo allora disporre in unico circuito tutte le capacità e le autoinduzioni possedute. Per l' impiego di grandi induttanze le correnti semplici di Duddel erano sinusoidali; ritenni quindi più semplice

far percorrere le due bobine in serie da queste correnti, derivando ai poli di una di esse una resistenza ohmica la quale bastava a produrre uno sfasamento tra i due campi; si avevano allora buonissime ellissi. La capacità impiegata era di circa 8 microfarad l'induttanza complessiva superiore a 10 millihenry; e si adoperavano due archi in serie, non bastando uno solo a intrattenere le oscillazioni. La frequenza così raggiunta fu di circa 500 periodi a secondo coi seguenti risultati:

Rame 28 div.; stagno 16 div.; bismuto 1 div.

Seconda Esperienza. Diminuendo alquanto la capacità e l'autoinduzione nello stesso dispositivo precedente, si passò a 900 periodi per secondo. I valori ottenuti per le coppie furono:

Rame 32; stagno 40; bismuto 3.

Terza Esperienza. Si cominciò a ricorrere al sistema doppio di circuiti inducente e indotto.

Il primo era costituito da due archi, da 0,97 microfarad e da due bobine dell'induttanza complessiva di circa 5 m. h., una delle quali era utilizzata per la produzione del campo. Il secondo conteneva un condensatore di 7,4 microfarad e la bobina producente il campo.

I due circuiti avevano inoltre, invece che due tratti in presenza, addirittura un'altra bobina in comune dell'induttanza di 0,26 m. h.; con ciò il principio del metodo resta, come è evidente, invariato. Il numero di giri del campo divenne di 2280 a secondo, e si ebbero i seguenti risultati:

Rame 27; stagno 50; bismuto 6,5.

Quarta Esperienza. Il sistema 1 conteneva 0,98 microfarad, e oltre alla bobina comune col sistema 2, un'induttanza complessiva di circa 2,79 millihenry. Il sistema 2 era costituito dalla solita bobina producente il campo e da 4 microfarad.

Il numero di giri del campo divenne di 2900 a secondo; la curva diveniva però poco buona; si ebbero questi risultati:

Rame 30; stagno 60; bismuto 12.

Quinta Esperienza. Il sistema 1 conteneva 0,95 microfarad e, oltre alla bobina comune, un' induttanza complessiva di un millihenry circa. Il sistema 2 conteneva la solita bobina e 1,65 microfarad. Il numero di giri montò a 4900 per secondo, la curva divenne sempre più lontana dalla forma ellittica e si ebbe per le coppie:

Rame 13; stagno 40; bismuto 20.

Sesta Esperienza. Il 1° sistema aveva la sola bobina del campo e 0,75 microfarad.

Il 2° la stessa bobina e 0,82 microfarad. La curva, piuttosto stretta, era molto difficile a ottenere; il numero di giri salì a 6100 a secondo e si ebbero questi risultati:

Rame 10; stagno 18; bismuto 15.

13. La tabella che segue riassume i risultati ottenuti, modificati proporzionalmente in modo da lasciar fermo, alle varie frequenze, il numero esprimente la coppia relativa al rame; sono quindi confrontabili solo i numeri disposti sulla stessa verticale:

	500	900	2280	2900	4900	6100
Rame	30	30	30	30	30	30
Stagno	17	37	56	60	80	54
Bismuto	1	3	7,2	12	40	45

Come si vede dalla tabella vengono confermati qualitativamente i risultati previsti. Mentre a 500 giri la coppia destata sul rame è prevalente, a 900 giri è maggiore quella subita dallo stagno; e a 4900 giri il bismuto, avente una resistenza circa 80 volte maggiore del rame, lo oltrepassa nel valore della coppia [1]).

1) Si noti che anche a 6100 giri la coppia non solo non è proporzionale alla resistenza, ma non è nemmeno crescente con essa. Siamo quindi ancora ben lontani dalle *grandissime velocità* cui si riferisce la formola (5) data dall' Hertz. Questo conferma quanto ebbi a dire alla fine del § 4.

14. Nel caso delle prime tre colonne la curva essendo di forma quasi perfettamente ellittica, è lecito dedurre l'intensità del campo dalla misura dell'asse minore.

Si fece a tal uopo un confronto diretto per il rame, coi seguenti risultati :

	500	900	2280
asse minore	3	3,7	4
quadrato del campo	9	14,5	16
coppie corrispondenti per il rame	30	32	28
coppie riferite al valore 3 del campo	30	20	16

Se poniamo questi numeri al posto corrispondente nella tabella precedente, riducendo in proporzione quelli degli altri metalli, otteniamo :

	500	900	2280
Rame	30	20	16
Stagno	17	24	21,8
Bismuto	1	2	3,8

e in questa tabella sono confrontabili i numeri disposti tanto su una orizzontale che su una verticale. Essa ci mostra nettamente che già tra 500 e 900 giri la coppia comincia a decrescere per il rame, mentre essa prima cresce e poi diminuisce per lo stagno ed è sempre crescente per il bismuto.

15. Per le frequenze più alte la misura delle curve, di cattiva forma, perde ogni significato. Così a 2900 giri si ha una curva piuttosto larga e deforme, che si migliora alquanto accorciando gli archi, con che il suono monta un poco in altezza. Il diametro minore della curva si restringe in pari tempo da 3,5 a 2,5.

Nei due casi il rame subisce le coppie 30 e 22, che non stanno affatto nel rapporto dei quadrati dei due diametri. Eppure il confronto tra rame e stagno diede

con curva larga : rame 30, stagno 60
con curva stretta : rame 22, stagno 45 .

Questo caso mostra nettamente quanto abbiamo previsto al paragr. 10, che cioè la legge di variazione del campo rotante può produrre notevoli deformazioni della curva, pur la-

sciando inalterati i valori relativi delle coppie per metalli diversi, cosicchè per il confronto tra questi occorre solo che la curva conservi una forma invariata.

Anche i valori della colonna 5ª (4900 giri) potrebbero essere introdotti nella ultima tabella osservando che, per la legge dedotta dalla teoria di Hertz al parag. 5, la quale farebbe dipendere la coppia solo dal rapporto $\frac{\omega}{x}$, la coppia subita dallo stagno a 500 giri deve essere all' incirca eguale a quella del bismuto a 4900, posto che la resistenza del bismuto sia circa decupla di quella dello stagno.

Così facendo i numeri di quella colonna divengono: rame 12, stagno 34, bismuto 17; e si può rilevare che la coppia dello stagno a 4900 giri risulta abbastanza vicina a quella del rame a 500 come deve essere, dato il rapporto delle resistenze di questi metalli.

Questo viene a confermare la legge suddetta.

Concludendo si può ritenere che i fenomeni procedono nelle loro linee generali come vuole la teoria. Una verifica quantitativa non è possibile sia perchè il problema non è risoluto, quantitativamente, dalla teoria, sia perchè, impiegando le correnti di Duddel, le misure del campo non possono più farsi a frequenze molto elevate.

Sarebbe desiderabile che queste ricerche, le quali mi riuscirono oltremodo penose dato il mezzo di produzione delle correnti alternate, vengano estese e completate disponendo dei nuovi apparecchi per la produzione di correnti sinusoidali a elevate frequenze.

Palermo, Istituto fisico della R. Università.
Febbraio 1905.

SU UN MODO DI OTTENERE LA VERTICALE A BORDO DELLE NAVI.

Nota di G. A. CROCCO.

(Tenente del Genio).

In alcuni studi sulla fotografia da mare eseguiti nell' estate dello scorso anno 1903, ho avuto occasione di occuparmi del problema della verticale a bordo. Esporrò qui succintamente un metodo, che ho riconosciuto migliore di quanti altri io conosceva.

Riguarderemo per semplicità al solo movimento di rollio, isolatamente da altri movimenti della nave, e considereremo sulla nave un pendolo composto, del quale sarà O il centro di sospensione, G il centro di gravità, l la distanza OG. Il centro O sarà supposto nel piano di simmetria longitudinale della nave, all' altezza h dall' asse principale d' inerzia del rollio. Se $\phi = \phi_0 \sin \omega t$ esprime, per piccoli angoli, il movimento di rollio, ω indicando l' inversa del semiperiodo, ogni punto del piano di simmetria risentirà, durante il rollio, un' accelerazione lineare normale a questo piano proporzionale alla *derivata seconda rispetto a t,* cioè a ϕ stesso: in particolare il punto O risentirà l' accelerazione :

$$- h \omega^2 \phi.$$

Se s' immagina che il pendolo composto considerato sia di dimensioni sufficientemente piccole rispetto ad h, si potrà ritenere che tutti i suoi punti risentano un' accelerazione eguale a quella del punto O, e ritenere la risultante delle forze di massa concentrata in G. Il momento di tale forza rispetto al centro di sospensione, sarà allora:

(1) $$- m h \omega^2 l \phi .$$

Immaginiamo adesso che nel punto A, alla distanza a da C sull' asse CG, siano disposti due congegni elastici in tensione

agenti perpendicolarmente al piano di simmetria della nave, e collegati in A al pendolo composto e per gli altri estremi a due punti fissi colla nave.

Durante il rollio, l' angolo della verticale col piano di simmetria della nave essendo φ, se α indica l' angolo di cui si scosta l' asse O G dalla verticale, $\varphi - \alpha$ indicherà l' angolo di cui si scosta OG dal piano di simmetria considerato. Ove questo scostamento abbia luogo, uno dei congegni elastici sovra accennati si allungherà, per piccoli angoli, di $a(\varphi - \alpha)$; l' altro accorciandosi di eguale quantità. Detto allora k un coefficiente relativo all' insieme dei due congegni, il punto A cui questi sono applicati sarà oggetto di una forza di richiamo, il momento della quale rispetto al punto O sarà, nel movimento del pendolo composto:

$$k a^2 (\varphi - \alpha). \tag{2}$$

Detto pertanto I il momento d' inerzia del pendolo, e g l' accelerazione della gravità, la equazione differenziale del movimento considerato rispetto alla verticale potrà scriversi:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + m g l \alpha - m h \omega^2 l \varphi + k a^2 (\varphi - \alpha) = 0. \tag{3}$$

Supponiamo tra (1) e (2) la relazione, agevole ad effettuarsi praticamente:

$$m h \omega^2 l = k a^2 ; \tag{4}$$

l' equazione (3) riducesi allora a:

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + ml (g - h \omega^2) \alpha = 0 . \tag{5}$$

La (5) è l' equazione delle piccole oscillazioni di un pendolo composto oscillante in terraferma, ove l' accelerazione della gravità sia supposta scemata del termine $h \omega^2$.

Ove dunque sia verificata la (4), le oscillazioni del pendolo considerato, a bordo, avverranno, con ampiezza decrescente,

attorno alla verticale, determinabile come posizione limite. Se il movimento di rollio è regolare, un pendolo composto cosiffatto finirà col fermarsi sulla verticale, dalla quale nessuna forza, proveniente dal rollio, tenderà a distrarlo.

Roma, Novembre 1904.

LIBRI NUOVI

IL TELEFONO,

per l' Ing. GIACINTO MOTTA.

(Hoepli, editore, Milano).

Nessuno può negare l' importanza che ha la pubblicazione di questo manuale, in un periodo in cui le applicazioni elettriche vanno sviluppandosi con rapidità vertiginosa.

L'A. ha raccolto in questo piccolo volume una quantità di cognizioni sulla telefonia, dai primitivi apparecchi ai moderni sistemi centrali di grandi città.

Certo, come dice l'A. nella prefazione, non si trova in esso la trattazione matematica dei complessi problemi che interessano la telefonia. Tanto il solerte editore, quanto l'A. hanno soltanto inteso di presentare un riassunto degli elementi su cui si avesse così svolta la tecnica attuale.

Nulla ha trascurato l'A. nella compilazione di questo manuale, perchè esso riuscisse completo, chiaro e sopratutto pratico. E questi intenti sono stati egregiamente raggiunti.

Dopo alcuni cenni storici, l'A. dedica la prima parte del suo libro al trasmettitore, al ricevitore, agli apparecchi trasmettitori e ricevitori delle chiamate, all' apparecchio telefonico e apparecchi ausiliari.

Nella seconda parte tratta delle perturbazioni nel circuito telefonico a semplice e a doppio filo e ai materiali e alla costruzione delle linee telefoniche.

Nella terza parte tratta della concentrazione telefonica cioè del tavolo semplice, multiplo e dei sistemi decentralizzati, a

batteria centrale, e a linee collettive; tratta del quadro di smistamento e dei sistemi automatici.

Chiude con un appendice dedicata alla qualità di fenomeni matematici sulle trasmissioni telefoniche come furono studiate dal Pupin, dal Wieblisbach, dal Breisig.

Il volume è adorno di 149 incisioni nitidissime e la stampa è, come sempre, ottima. G. C. C.

LE TURBINE A VAPORE ED A GAS,

per l' Ing. GIUSEPPE BELLUZZO.

(Milano, Ulrico Hoepli, editore).

La pubblicazione dell' Ing. Belluzzo, per la sua originalità merita il più grande interessamento da parte dei tecnici e degli studiosi di meccanica industriale.

L'A. infatti, tratta in modo nuovo, valendosi unicamente dei metodi grafici, come più spicci e meno suscettibili di errore, alcune parti importanti della termodinamica.

Il volume è diviso in quattro parti. Nella prima, che ha per titolo « *teoria grafica dei fluidi elastici e del loro movimento* » dopo aver parlato del calore specifico, dell' entropia e del peso termico, viene a rappresentare l' entropia mediante un' asse che ha il segno positivo quando si tratta di ciclo reversibile e negativo nel caso opposto. Quindi rappresenta graficamente le proprietà fondamentali del vapor d' acqua saturo, e dà una costruzione grafica del profilo delle turbine a vapore De Laval. Dedica un capitolo al vapore d' acqua surriscaldato e dimostra, sempre graficamente, i vantaggi termici del surriscaldamento.

In quattro altri capitoli, l'A. rappresenta, con metodi grafici, le proprietà dei gas, la trasformazione politropa; tratta dell' urto dei fluidi elastici, del lavoro sviluppato da un fluido che si muove in un canale e delle ricerche sperimentali sull' efflusso dei gas e dei vapori.

La seconda parte si riferisce ai « *metodi grafici applicati al calcolo delle turbine a vapore ed a gas* ». In essa dopo

aver parlato della costituzione delle turbine e sulla rappresentazione schematica dei vari tipi, l'A. dà una costruzione generale fra il calcolo d' una turbina di tipo qualunque e per dedurre la velocità di massimo rendimento e il grado di reazione e si vale quindi di queste costruzioni per calcolare le turbine a ruote semplici e a ruote multiple.

Non meno originali sono i capitoli nei quali l'A. confronta le turbine a vapore d' acqua e le motrici a stantuffo; le turbine a vapore con quelle a gas. Inoltre incontrano la massima attenzione i capitoli che trattano della parzializzazione delle turbine a vapore ed a gas e della velocità limite che le turbine possono raggiungere, e del rendimento di queste dall' influenza in esse del condensatore; l'A. conchiude questa seconda parte dando i criteri pratici che devono guidare i costruttori di turbine a fluido elastico.

La terza parte è dedicata ad una descrizione critica dei vari tipi attuali di turbine a vapore. E in capitoli a parte sono trattate le turbine. De-Laval, Seger, A. E. G. (Riedler-Stumpf) Rateau-Elektra; Parson, Rateau, Zelley; A. E. G. a ruote multiple delle quali l' A. (valendosi della sua non comune esperienza) fa rilevare i pregi ed i difetti, corredando le asserzioni di numerosi esempi numerici e di dati sperimentali. Vanno notate, e ciò fa onore al solerte editore, le bellissime incisioni originali che illustrano questi ultimi capitoli.

Finalmente la quarta parte è dedicata all' applicazione delle turbine a vapore nella marina e a tutto quanto è stato finora fatto in proposito.

L' originalità del lavoro, la chiarezza dell' esposizione, la ricchezza dei dati sperimentali, le numerose ed accurate illustrazioni sono tali pregi, che fanno presagire come l'opera dell' Ing. Belluzzo debba essere apprezzata da tutti coloro che seguono con interessamento questo ramo dell' ingegneria.

L' edizione è, come sempre, nitida.

G. C. C.

LEÇONS SUR L'ÉLECTRICITÉ,

par ERIC GÉRARD.

(Librairie, Gauthier-Villars, Paris 1905).

Settima edizione.

Coi tipi del Gauthier-Villars di Parigi, l'Ing. E. Gerard ha pubblicato il secondo volume delle sue lezioni di elettricità, professate nell' Istituto elettrotecnico Montefiore, di cui è direttore.

La pubblicazione di questo nuovo volume sarà salutata con gioia non solo dagli ingegneri elettricisti, ma dai cultori delle discipline fisiche in genere.

Questo secondo volume del Prof. Gérard completa un'opera di alto valore, e si può dire, senza tema di esagerare, che, fra i trattati del genere, è uno dei più apprezzati.

L' esposizione è chiara, i calcoli non presentano alcuna difficoltà; essi sono accessibili a chiunque sappia leggere un differenziale o un integrale. Ma ciò che rende maggiormente apprezzabile l' opera, (e gli studiosi di cose fisiche potranno constatarlo) sono le istruzioni che l'A. dà sul modo di fare i progetti d' un trasformatore, delle distribuzioni elettriche per la luce, dei motori a corrente continua, della trazione dei tramway, ecc. ecc., e i molti dati numerici dedotti da impianti esistenti, cosicchè con questa pubblicazione l'A. ci dà anche un quadro esatto dello stato attuale delle costruzioni elettromeccaniche.

Che l' opera abbia esercitato un grande interesse, lo dimostra il fatto che essa, nel corso di non molti anni, è giunta già alla settima edizione notevolmente arricchita.

La materia è così distribuita:

Trasformatori statici -- Canalizzazione e distribuzione dell' energia elettrica — Applicazioni dell' elettricità alla telegrafia, alla telefonia, alla luce, alla produzione ed alla trasmissione della forza motrice, alla trazione, alla metallurgia ed alla chimica industriale.

Il volume è adorno di 432 figure nitide, che facilitano l' intelligenza del testo. L' edizione è ottima.

G. C. C.

CORSO DI ELETTROTECNICA,

per il Prof. GUIDO GRASSI.

Volume I.

(Casa editrice nazionale. — Roux e Viarengo, Torino, L. 14).

È uscito il primo volume di quest' opera, in cui l' Ingegnere Grassi, professore di elettrotecnica e direttore della scuola « Galileo Ferraris » presso il R. Museo industriale di Torino, ha svolto una parte delle sue lezioni, e precisamente quella che si riferisce alle macchine dinamo-elettriche generatrici (alternatori e dinamo a corrente continua) e dei trasformatori a correnti alternate.

La pubblicazione di questo volume non può non essere salutata con vera gioia dagli studiosi di cose teoriche in generale e dai numerosi ingegneri elettricisti, e studenti delle nostre scuole d' applicazione in particolare.

Questo volume giunge in buon punto a colmare una lacuna che esisteva nella nostra letteratura tecnica. Ed il vuoto viene colmato con un lavoro magistrale.

Il volume è diviso i due parti.

Nella prima — *macchine dinamo-elettriche generatrici* — premessi alcuni principi generali, tratta degli alternatori, delle disposizioni generali ed avvolgimenti indotti, e delle f. e. m. negli alternatori. Dedica dei capitoli speciali al calcolo della eccitazione, alla reazione dell' indotto, controspire e selfinduzione, allo studio del funzionamento degli alternatori e alle relazioni generali fra gli elementi di un alternatore. Un capitolo speciale è poi riservato al calcolo di un alternatore.

Entra quindi a parlare delle dinamo a corrente continua, delle quali dedica dei capitoli speciali per la trattazione della reazione dell' indotto, a concentrazione, degli avvolgimenti indotti, del sistema induttore. Fa quindi lo studio del funzionamento delle dinamo e delle curve caratteristiche, e tratta delle relazioni generali fra gli elementi di una dinamo a corrente continua e calcolo delle sue dimensioni. Chiude la prima parte con esempi di alcune macchine generatrici complete.

La seconda parte — *trasformatori a corrente alternata* — è composta di due capitoli, uno dei quali è dedicato ai prin-

cipali tipi di trasformatori e teoria generale, ed il secondo alla regolazione ed al calcolo dei trasformatori.

Non mancano degli esempi numerici che rendono ancor più facile l'intelligenza delle leggi e delle formole fondamentali.

Auguriamoci che presto vengano alla luce gli altri due volumi a completare così questa opera che risponda ad un bisogno da molto tempo universalmente sentito.

Il nome illustre dell'autore e quello del solerte editore che se ne è assunta la pubblicazione, sono arra sicura che il volume riuscirà utilissimo e sarà apprezzato da tutti indistintamente i tecnici cultori delle discipline fisiche.

Il volume è adorno di 272 figure nitidissime e la stampa è ottima. G. C. C.

NOTIZIE SULLA TEORIA DEGLI IONI NELLE SOLUZIONI ACQUOSE,

di UGO GRASSI.

Con una prefazione di A. BATTELLI.

(Pisa, E. Spörri, 1905).

I vantaggi che la teoria della dissociazione elettrolitica porta nella interpretazione dei fenomeni più svariati di cui si occupa la fisico-chimica, non potevano esser messi in miglior rilievo di quello che ha fatto l'A. di questo libro. Egli, infatti, con indirizzo scientifico ben inteso, dopo una breve introduzione storica e un rapido cenno sulle proprietà osmotiche delle soluzioni e sulla legge di Faraday, pone a fondamento di tutta la rimanente trattazione le equazioni del movimento degli ioni, deducendone tutte le conseguenze che hanno riguardo alle loro proprietà fisiche ed elettriche. Nell'ultima parte del libro viene illustrata la relazione fra le concentrazioni degli ioni e le molecole neutre da cui derivano, da cui poi si deducono le proprietà chimiche degli ioni.

Un'appendice tratta più specialmente con l'analisi matematica alcune questioni relative alla termodinamica; ma in tutta la trattazione viene fatto largo uso dell'analisi e del calcolo differenziale, perchè, con giusto concetto, fin da prin-

cipio l'A. introduce l'uso del potenziale termodinamico, che tanto aiuto porge nello studio della fisico-chimica.

Questo, che è un pregio notevole del libro, mostra ognora più la necessità che gli studi universitari sieno coordinati in modo, che i cultori della chimica possano servirsi di un mezzo d'investigazione così potente com'è l'analisi differenziale, e senza la cui cognizione è ormai impossibile tener dietro al progresso continuo delle scienze sperimentali.

Il libro del Grassi sarà consultato con grande profitto da chi voglia conoscere lo stato attuale di uno fra i più importanti problemi che tanto interessano la chimica e la fisica insieme, e che non si può dire ancora del tutto definitivamente risoluto.

Ed invero, esponendo i vantaggi che si hanno adottando le vedute di van 't Hoff e di Arrhenius, l'A. non ha taciuto le difficoltà che esse presentano tuttora. A. S.

RIVISTA

Physikalische Zeitschrift. Maggio e Giugno 1904.

Cassuto Leonardo. *Sulla solubilità di gas in liquidi* - I parte - Ricerche fino a 10 atmosfere (pp. 233-236). — V. *N. C.* vol. VI, p. 5.

Seeliger H. *Nota al lavoro del Sig. A. Schmidt « Osservazione della diminuzione di chiarezza mediante la rifrazione »* (pp. 237-238). — È una confutazione della nota citata. V. *N. C.* Vol. VI.

Elster J. e Geitel H. *Sopra un miglioramento del fotometro a sfera di zinco per la determinazione della radiazione solare ultravioletta* (pp. 238-241). — Una sfera di zinco si trova in un tubo girevole intorno ad asse orizzontale; il tubo va diretto in modo che i raggi solari vi passino paralleli all'asse e se ne può leggere l'altezza su un circolo graduato. La sfera è in comunicazione con un condensatore e un elettroscopio di Exner e la lettura della divergenza delle foglie è fatta su scala a specchio. L'isolante è l'ambra.

Si amalgama con cura la sfera; si dirige il tubo in modo che i raggi solari lo percorrano paralleli all'asse; si carica negativa-

mente sfera e condensatore, e si lasciano agire i raggi solari per un certo tempo. Sia V_0 il potenziale iniziale, V il finale; si ricarica al potenziale V'_0 e, intercettati i raggi solari, si lascia che il potenziale scenda durante lo stesso tempo. Sia V' il nuovo valore.

L' intensità della luce incidente è

$$I = \frac{c}{b\,t}\left(\log \frac{V_0}{V} - \log \frac{V'_0}{V'}\right).$$

dove c è la capacità del sistema e *b* una costante.

BERNINI 'ARCIERO. *Sull' influenza della temperatura sulla conducibilità elettrica del sodio* (pp. 241-245). — V. *N. C.* Vol. VI, 1903.

MANDELSTAM L. *Per la teoria dell' eccitatore di Braun* (pp. 245-248).

TUFTS F. L. e STARK J. *La corrente elettrica nelle fiamme tra elettrodi vicini* (pp. 248-254). — Questa ricerca fa seguito ad altre affini già riassunte. Gli elettrodi di platino, fatti con lamine sottili o con fili, sono per lo più vicinissimi; le fiamme sono date o dai soliti bruciatori rotondi o, per lo più, sono piatte, e l' aria per la loro combustione passa per un polverizzatore contenente acqua pura o la soluzione che deve colorare la fiamma.

Se gli elettrodi distano circa 2 mm. e sono di platino pulito, allorquando cresce la tensione cresce pure la corrente, prima rapidamente, poi più lentamente, fino a che diventa una funzione lineare della tensione, e ciò tanto nella fiamma incolora quanto se colorata da sali.

Se gli elettrodi sono più vicini questo contegno si verifica ancora se la fiamma contiene i vapori di un sale buon conduttore, o se gli elettrodi sono a temperatura inferiore al calor bianco.

Se la distanza è inferiore al mm. e gli elettrodi sono di platino pulito, in fiamma incolora e temperatura elevata, l' intensità cresce dapprima rapidamente al crescere della tensione, poi più lentamente, secondo una funzione lineare e poi ritorna a crescere più rapidamente. La curva rappresentatrice dell' andamento della corrente in funzione della tensione, in assi coordinati, presenta in questo caso un' inflessione.

Sia con distanze piccole, sia con grandi, in fiamma colorata o no, non è possibile ottenere lo stato di saturazione della corrente elettrica.

Poichè agli elettrodi non si raggiunge mai la tensione di ionizzazione degli ioni positivi, l' esistenza del punto d' inflessione deve attribuirsi ai soli ioni negativi.

Precisamente l' inflessione di dette curve si stabilisce quando lo strato catodico giunge fino all' anodo; ma se questo strato è piccolo rispetto alla distanza tra gli elettrodi (quando p. es. questi sono lontani in fiamma incolora, o vicini in fiamma colorata da un sale), l' inflessione non si può produrre perchè la variazione della resistenza catodica è piccola rispetto alla resistenza totale.

Se si adopra un catodo di platino ricoperto di ossido di calcio il quale è assai emissivo di ioni, si vede che il punto d' inflessione si produce per valori tanto minori della tensione quanto più piccole sono le distanze.

Paragonando le curve ottenute sia con elettrodi di platino pulito che con elettrodi di platino ricoperto di ossido di calcio, si vede che nel primo caso dopo l' inflessione l' aumento della corrente è lento; nel secondo invece è assai rapido.

Ciò è dovuto al fatto che quando gli elettrodi sono ricoperti di ossido di calcio, al di là del punto di inflessione, tra essi si stabilisce un vero arco.

HONDA K. e SCHIMIZU S. *Sull' esistenza del punto critico del Villari nel nichelio* (pp. 254-255).

HEYDWEILLER A. *Sul punto critico del Villari nel nichelio* (255-256). — I due fisici giapponesi misurano la magnetizzazione di una sbarretta di nichelio col metodo balistico, per tensione o compressione costanti e campo variabile, o per campi costanti e tensioni variabili.

La tensione diminuisce e la compressione aumenta sempre la magnetizzazione, in modo che la variazione di magnetizzazione è quasi proporzionale ad esse.

Essi non riscontrano mai l' esistenza del punto critico del Villari osservato da Heydweiller.

Heydweiller osserva che le condizioni delle esperienze precedenti sono forse improprie, perchè p. es. la sbarretta è troppo grossa rispetto alla lunghezza, e che quindi questo risultato negativo non può infirmare quello positivo da lui trovato precedentemente.

GOCKEL A. *Osservazioni sulla dipendenza della conducibilità elettrica dell' atmosfera dai fattori meteorologici* (pp. 257-259). — L'A. paragona le curve della pressione barometrica nelle varie ore del giorno con quelle che rappresentano il rapporto q tra il coefficiente di dispersione negativa e il coefficiente di dispersione positiva nelle stesse ore, e trova che ad una diminuzione di pressione corrisponde in generale un piccolo valore di q, a un aumento un grande valore. Le contradizioni potrebbero essere dovute alla temperatura o ad altre cause [1]).

1) Cfr. pag. 238, nota 1.

Zölls Bonifaz. *Su misure della caduta del potenziale atmosferico a Kremsmünster* (pp. 260-263). — Le determinazioni sono fatte con apparecchio registratore di Benndorf in giorni ben chiari. Si palesa un periodo annuale con massimo in dicembre, minimo in giugno; si manifesta pure un periodo diurno con più massimi e minimi tra i quali i più regolari e notevoli sono rispettivamente alle 19 e alle 3. L'A. esprime la curva giornaliera con funzioni di Bessel; egli studia l'influenza dello stato nebuloso del cielo che consiste in generale nell'abbassare notevolmente il gradiente.

L'A. non verifica l'azione della luna scoperta da Ekholm e Arrhenius.

Cassuto L. *L'arco elettrico fra mercurio e carbone* (pp. 263-264). — V. *N. C.* vol. VII, 1904.

Stark J. e Cassuto L. *L'arco elettrico tra elettrodi raffreddati* (pp. 264-269). — V. *N. C.* vol. VII, 1904.

Heathcote Walter L. *Un nuovo detector misuratore per onde elettriche* (pp. 269-270). — Una spirale fatta con due avvolgimenti contrari di filo sottile di acciaio è sospesa coll'asse verticale tra i poli di un'elettrocalamita rotante intorno allo stesso asse. La sospensione è in filo di bronzo fosforoso; l'estremità inferiore della spirale pesca nel mercurio in modo che nella spirale si possano lanciare delle oscillazioni.

L'effetto di queste consiste nell'*aumentare* l'isteresi magnetica della spirale e quindi la coppia esistente tra campo e spirale, modificando per conseguenza la posizione di questa. La deviazione si può seguire con uno specchio, e può essere segnata con un syphon recorder.

Iklè Max. *Sullo spettro d'assorbimento ultrarosso di alcuni liquidi organici* (pp. 271-277). — La ricerca è fatta con luce di zirconio, prisma e vaso d'assorbimento di fluorite, termopila di Rubens.

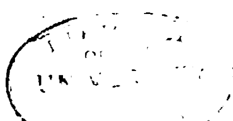
Dai risultati deduce che sostituendo in un liquido organico l'idrogeno o l'idrossile con un alogeno, la diatermaneità aumenta.

Per gli spettri di corpi isomeri non si può dedurre nessuna regolarità.

Un minimo di diatermaneità, verso 3,4 μ si deve forse attribuire senz'altro al carbonio.

Per nessuno dei liquidi si verifica la legge di Maxwell tra indice di rifrazione e costante dielettrica.

Curie P. *Nuove ricerche in radioattività* (pp. 281-288, 313-318, 345-348). — Il Curie riassume i principali risultati ottenuti in questo campo, sia da lui che da altri sperimentatori, dalla scoperta delle sostanze fortemente radioattive in poi.



BAUMHAUER H. *Osservazioni sulla luminosità dello schermo di Sidotblenda* (p. 289). — Questa luminosità dipende da varie circostanze, tra le quali il grado di umidità, perchè aumenta alitando sullo schermo, spruzzando con acqua calda ecc.; in questo caso, lasciato asciugare lo schermo e alitatovi sopra, diventano più luminose le parti che non erano state spruzzate.

BERNDT G. *L'azione delle pile a selenio sulla lastra fotografica* (pp. 289-290). — L'A. ritiene che l'azione fotografica scoperta da Tandin Chabot (V. *N. C.* vol. 7°) non sia dovuta ad una emanazione o radiazione del selenio, ma al contatto diretto della lastra fotografica colla lamina di alluminio e colla pila a selenio.

LÖWY A. e MÜLLER FRANZ. *Alcune osservazioni sul comportamento elettrico dell' atmosfera al mare* (pp. 290-294). — Si tratta specialmente di misure di dispersione elettrica e di gradiente eseguite in riva al mare. I valori di $a-$ e $a+$ risultano notevolmente superiori ai valori ottenuti a distanza dal mare, o in regioni montuose e lo stesso si dica del loro rapporto, così che la ionizzazione dell' aria è diversa dal mare alla montagna.

GERDIEN H. *Misura di piccole capacità mediante una capacità normale variabile in modo determinato* (pp. 294-296). — Il condensatore è fatto con due serie di cilindri coassiali che si possono spostare lungo l' asse comune aumentando o diminuendo la capacità. La posizione relativa si legge su apposita scala divisa in mm. con nonio, e da essa si deduce la capacità del condensatore dopo averlo tarato con un condensatore normale.

GERDIEN H. e SCHERING H. *Un metodo per misurare la velocità dei gas, con particolare riguardo agli apparecchi per l'elettricità atmosferica* (pp. 297-298). — Per determinare il numero specifico degli ioni in un gas, e la loro velocità specifica, occorre conoscere il volume di gas fornito, in un dato tempo, da un aspiratore, e quindi la sua velocità in un tubo.

Gli A. ricorrono all' anemometro ad alette, dal quale tolgono il contagiri, eliminando in tal modo l' inconveniente del notevole attrito del roteggio del contagiri, e contano i giri col metodo stroboscopico. Dalle loro esperienze risulta che il numero dei giri di quest' anemometro è proporzionale alla velocità del gas.

MARX ERICH. *Sulla conducibilità delle fiamme* (*Osservazioni al lavoro del Sig. J. Stark* (pp. 298-300). — Si tratta di alcune questioni di priorità e di polemica suscitate dal lavoro dello Stark: « *Osservazioni teoriche sulla ionizzazione delle fiamme* ».

WHITEHEAD J. B. *Azione magnetica dello spostamento elettrico* (pp. 300-302). — Il principio del metodo è il seguente; un dielettrico è soggetto contemporaneamente a un campo elettrico e a

un campo magnetico variabili, aventi direzioni perpendicolari fra di loro, fasi tali che la reazione delle correnti di spostamento, rispetto al campo magnetico, sia massima; essa tenderà a muovere il dielettrico in direzione perpendicolare al piano del campo magnetico e del campo elettrico.

Il campo elettrico è prodotto tra due anelli concentrici di ottone, e il campo magnetico (di ugual frequenza) è prodotto da una spirale concentrica coi due anelli ed esterna ad essi. Il dielettrico consiste in due masse attaccate agli estremi di un bastoncino orizzontale di vetro, sospeso a un filo di quarzo o di acciaio.

Il risultato delle ricerche è negativo.

Reinganum Max. *Sopra una possibile relazione tra le serie di spettri e i volumi atomici* (pp. 302-303). — Ammesso che l' estremo delle serie laterali sia dato dalla costante A della formula di Kayser e Runge, si ottengono cinque gruppi di elementi chimicamente affini, per ognuno dei quali il limite della serie è tanto più spostato verso il rosso, quanto maggiore è il peso atomico.

Se invece del peso si tien conto del volume atomico, i gruppi si possono ridurre a tre, e si possono riunire in uno solo se si dividono i volumi atomici degli elementi del secondo gruppo per 4 e quelli del terzo per 6.

Se questa relazione è generale si vedrà quando si avrà maggior materiale di osservazioni.

Van Aubel Edmund. *Risposta alla critica del Sig. Franz Streinz* (pp. 303-305).

Meyer Stefan e v. Schweidler R. Egon. *Sull' influenza delle variazioni di temperatura sulle sostanze radioattive* (pp. 319-320). — La sostanza radioattiva si trova nell' interno di un recipiente metallico che può venire scaldato, e comunica con l'elettroscopio di Elster e Geitel.

Il tempo di scarica cresce notevolmente aumentando la temperatura del recipiente; pel radio il fenomeno è complicato dalla produzione di emanazione, per cui dapprincipio diminuisce la velocità di scarica, ma in seguito aumenta e anche le pareti del recipiente diventano attive.

Elster J. e Geitel H. *Sulla radioattività di alcune terre e di sedimenti di fontane* (pp. 321-325). — L' apparecchio consiste dell' elettroscopio di Exner tenuto sotto una campana metallica colle terre che si sperimentano. Tra queste qualcuna è attivissima; non sembra che la loro attività decresca col tempo; il limo depositatosi alle origini di una sorgente di Baden - Baden è così attivo da potersi paragonare al solfato di uranio, ed è ricco di ema-

nazione. Esso induce l'attività e l'attività da esso indotta decresce più lentamente di quella indotta dal radio, più rapidamente di quella indotta dal torio.

In una nota precedente già riassunta, gli A. avevano dimostrato che da uno di questi fanghi avevano ottenuto un residuo attivo di solfato di bario, e che dall'elettrolisi di questo ottenevano al catodo uno strato attivo.

In 100 giorni il precipitato perdette $\frac{1}{3}$ della sua attività; è ricco di emanazione e non ha manifestato azione fotografica attraverso all'alluminio; invece lo strato ottenuto al catodo non ha perduto in attività, non dà emanazione ed agisce fotograficamente.

Simpson George C. *Sulla causa della caduta normale del potenziale atmosferico e della carica negativa della terra. Osservazioni alla teoria del Prof. Ebert* (pp. 325-326). — L'A. fa alla teoria dell'Ebert alcune osservazioni di diversa natura: 1° che le esperienze fatte da Ebert per confermare la teoria non rispondono alle condizioni reali; 2° che se anche corrispondessero e quindi dal suolo uscissero ioni positivi, occorrerebbe una sensibile corrente verticale di aria per stabilire e mantenere il campo elettrico; 3° che la teoria non spiega il campo elettrico alla superfice del mare dal quale non si sviluppano ioni [1]).

Spring A. *Sopra una disposizione automatica per aumentare il campo dell'elettrometro registratore, con un'osservazione sul tracciamento automatico della dispersione elettrica dell'atmosfera* (pp. 326-329). — Allorquando l'ago dell'elettrometro a quadranti è giunto all'estremità della sua corsa, chiude un circuito che riduce a $^1|_8$ il numero delle pile attaccate alle coppie di quadranti, e quindi la sensibilità.

La 2ª parte è solo progettata.

Bose Emil. *Sull'azione chimica dei raggi catodici* (pp. 329-331). — Una soluzione alcalina satura, posta in un tubo vuotato d'aria è soggetta per lungo tempo all'azione dei raggi catodici. Si stabilisce una riduzione con sviluppo di idrogeno libero il

1) Per questa terza obbiezione mi pare che si potrebbe osservare che il mare debba assumere all'incirca il potenziale elettrico del suolo, o che il vento trasporti gli ioni al di sopra della sua superfice, generando così il campo elettrico. Al mare si dovrebbe dunque avere in generale una dispersione negativa minore che a terra; invece Löwy e Müller (v. p. 236) trovano il contrario.

Del resto si può ancora notare che dalla teoria di Ebert risulta che allorquando diminuisce la pressione atmosferica, un certo numero di ioni positivi deve passare dal suolo nell'aria e per conseguenza la dispersione negativa deve aumentare. Invece Gockel (v. p. 234) trova una diminuzione nel rapporto di questa dispersione a quella positiva, per ogni diminuzione di pressione.

quale è in grande eccesso sulla quantità che sarebbe prodotta se l'azione fosse puramente elettrolitica. L'A. attribuisce questo eccesso alla trasformazione di una parte dell'energia cinetica dei raggi catodici la quale, nel suo totale, sarebbe capace di dissociare una quantità di acqua ancora maggiore. L'A. ritiene pure che questa spiegazione sia generale per le azioni chimiche prodotte dai raggi catodici.

WIENER OTTO. *Doppia rifrazione lamellare* (pp. 332-338).

REICH M. *Alcune osservazioni al detector dello Schlömilch per la telegrafia senza fili* (pp. 338-340). — Il detector dello Schlömilch consiste in un voltametro contenente soluzione acida diluita, con elettrodi di platino o di oro; la corrente che attraversa il voltametro deve essere debolissima; nel circuito c'è un galvanometro. Quando giunge ad esso un sistema di onde elettriche, la deviazione del galvanometro aumenta considerevolmente. L' anodo deve essere piccolissimo; le dimensioni del catodo hanno scarsa azione.

L'A. ritiene che questo detector agisca per via della depolarizzazione cagionata dalle onde elettriche, e ciò sia per l'esame delle curve di corrente ottenute coll'oscillografo di Duddel, sia perchè scaricando un condensatore attraverso al detector, in modo che la scarica sia aperiodica, si vede che la corrente varia di poco quando ha lo stesso senso della scarica, varia moltissimo quando ha senso contrario, e perciò la scarica agisce da depolarizzante.

L'A. mette ancora in relazione il modo di agire di questo detector, col fenomeno studiato dal Ruer, per cui un anodo di platino si scioglie in una soluzione di acido solforico, se attraverso a questa passano contemporaneamente deboli correnti continue e alternate.

ALESSANDRO AMERIO.

PIETRO SALVIONI, *gerente responsabile.*

PIETRO TACCHINI

Nel Marzo decorso spegnevasi in Spilimberto di Modena il Prof. Pietro Tacchini, cavaliere del merito civile di Savoia. Nato nel 1838 a Modena e laureatosi colà nel 1859 in matematica e fisica, passò all' Osservatorio di Padova a completare la sua coltura in astronomia per la quale egli aveva dimostrato spiccate attitudini. Da Padova passò poi a Palermo, indi all' Osservatorio del Collegio Romano ove successe al Padre Angelo Secchi.

Oltrechè studioso di alto merito, e basterà per ciò citare la medaglia Rumford conferitagli dalla Società fisica di Londra, il Tacchini era fervente apostolo della astronomia e dell' astro-fisica in modo particolare. Fondò col padre Secchi la Società italiana degli Spettroscopisti e nelle Memorie di essa pubblicò la maggior parte dei suoi notevoli lavori sulla fisica del sole. Fu socio ai Lincei e nelle Memorie e negli Atti della insigne Accademia si trovano pubblicazioni del Tacchini ed i suoi rapporti sulle ecclissi solari che, non schivo a disagi, si recò ad osservare anche nell' altro emisfero.

Organizzò ed istituì il servizio metereologico nazionale creando l' Ufficio centrale di metereologia e geodinamica in Roma.

L' uomo fu pari allo scienziato. Come fu un lutto per la scienza il suo ritrarsi, due anni fa, dalla Direzione dei due Osservatorii del Collegio Romano (ove poi gli successero il Millossevich ed il Palazzo) perchè la forte fibra di lui sentivasi minata dal male che forse ebbe origine nelle sue peregrinazioni scientifiche, così oggi è comune il lutto per la scomparsa dell' uomo dall' animo nobilissimo, dal cuore pieno di dolcezza.

R. M.

UN CAPITOLO DI ACUSTICA MUSICALE,

del Dott. GIULIO ZAMBIASI.

Una lunga serie d' esperienze che ho fatto per iscoprire il legame tra le leggi delle vibrazioni sonore e i fenomeni fisiologici ed estetici, m' ha convinto che, se l' applicazione alla musica delle belle teorie acustiche non ha ancora ottenuto la generale soddisfazione; è da attribuirsi a mancanza d' unità nella teoria che confonde fenomeni fondamentali con secondari e s' appoggia ad ipotesi vacillanti. È noto che Helmholtz basa la consonanza di due suoni:

a) sulla coincidenza di più armonici,

b) sulla semplicità dell' intervallo dei suoni risultanti coi principali,

c) sulla frequenza o assenza dei battimenti,

d) sull' ipotesi delle risonanze elementari nell' orecchio.

Io propongo i fenomeni noti delle vibrazioni e della loro composizione sotto *un unico punto di vista* che ha il vantaggio di render ragione dei fenomeni musicali, fisiologici ed estetici, basandosi *su fatti sperimentali derivati dall'essenza stessa delle vibrazioni*, non da fenomeni secondari, senza il soccorso di ipotesi intorno al meccanismo dell' audizione.

Considero i *suoni semplici*, gli *intervalli* e gli *accordi*, come *tre fenomeni periodici diversi*, ai quali corrispondono diverse sensazioni caratteristiche. La percezione chiara ed individua dei tre fenomeni è legata ad una condizione fisiologica, che è la *costante del tempo*, comune a tutti i sensi. Perciò è necessario che la durata del periodo sia compresa entro limiti comuni; fuori di quei limiti la percezione auricolare o è oscura ed ambigua o manca affatto.

Siccome per l' essenza della musica basta tener conto dell' *altezza* dei suoni che dipende dalla durata della vibrazione; così, analogamente, per la teoria generale degli intervalli e degli accordi è sufficiente misurare e paragonare la durata dei loro periodi.

Non avendosi, come pel suono, un termine che indichi la proprietà dell'intervallo derivante dalla durata del suo periodo, io la chiamo *percettibilità* o *grado di percettibilità degli intervalli* [1]).

Io quindi misuro il grado di consonanza d'un intervallo dalla brevità del suo periodo.

2. Intervalli.

Un suono semplice e determinato è prodotto da un *movimento periodico* vibratorio, trasmesso all'orecchio dal mezzo elastico nel quale si propaga. Ciò che determina il *periodo* è l'*isocronismo* e la *frequenza* delle vibrazioni [2]). Perciò un suono semplice di data altezza è definito fisicamente, o dal numero N di vibrazioni *al secondo*, o dalla durata τ d'una vibrazione. Donde la nota equazione:

$$N\tau = 1 . \qquad (1)$$

Intervallo in acustica significa l'*altezza relativa di due suoni;* e si misura col rapporto delle loro *altezze assolute* M, N (che per la (1) sono nell'inversa delle durate τ_1, τ_2) ridotto ai minimi termini:

$$\frac{M}{N} = \frac{am}{an} = \frac{m}{n} = \frac{\tau_2}{\tau_1} . \qquad (2)$$

È da avvertire che questa definizione è insufficiente per la musica, dove si tien conto della sensazione propria dell'intervallo e del suo valore estetico. In altre parole il rapporto $\frac{m}{n}$ misura soltanto la *grandezza dell'intervallo;* ma non segna la sua posizione nella gamma dei suoni, così come $\frac{M}{N}$. Per completarla basta tener conto anche del fattore a colla seguente interpretazione fisica. Il rapporto $\frac{m}{n}$ significa

1) Le mie prime esperienze sono esposte in due memorie: Le figure di Lissajous ecc. Riv. Mus. It., Vol. 10, 1903 e: La legge dei rapporti semplici ecc. Ivi, V. 11, 1904.

2) Non è dimostrato che la vibrazione sonora debba essere pendolare.

che *mentre ad un suono rispondono m vibrazioni, all'altro ne rispondono n, e sono i più piccoli numeri interi possibili.* Il numero a dice quante volte in un minuto secondo si ripete ciascun gruppo di vibrazioni m ed n. Di qui l' idea di considerare l' intervallo come fenomeno dovuto ad un nuovo movimento periodico risultante dalla sovraposizione dei due periodi semplici dei due suoni: il periodo elementare consta di m vibrazioni d' un suono e di n dell' altro, e la durata del periodo è il tempo T richiesto a formare il gruppo (m, n) che si ricava dalla (2):

$$m\tau_1 = n\tau_2 = \frac{1}{a} = T . \tag{3}$$

La vera interpretazione fisica della figura di Lissajous è questa: essa è imagine elementare dell' intervallo musicale che si riconosce ad occhio così come l' intervallo ad orecchio: la sua *forma* indica quante vibrazioni di ciascun suono concorrono a formarla, e *il tempo che essa richiede* a formarsi è la misura della durata del periodo elementare dell' intervallo.

Questo è il concetto fondamentale della mia teoria acustica: l' intervallo di due suoni è definito elementarmente da un fenomeno periodico diverso dalla vibrazione: la durata del suo periodo è per la percettibilità degli intervalli, quello che la durata della vibrazione è per l' altezza del suono.

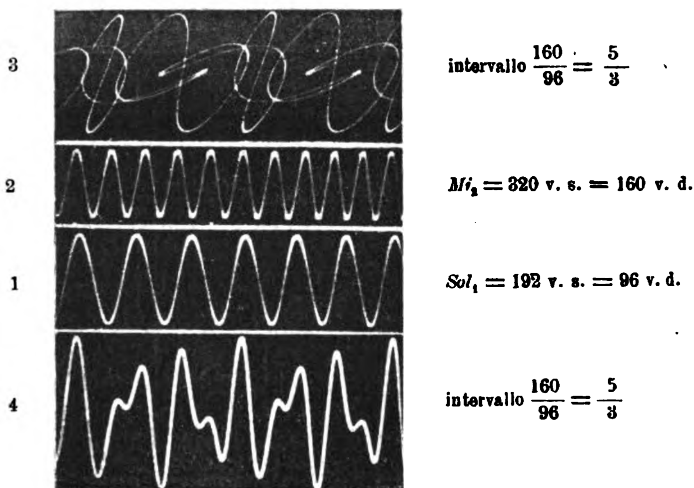
Per mettere in evidenza anche il periodo ho tracciato le vibrazioni e le risultanti della composizione parallela e perpendicolare sopra un piano mobile.

Le figure 1 e 2 sono così collocate che a tre vibrazioni del Sol_1 ne rispondono cinque del Mi_2. La figura 4 non ha forma sinusoidale, ma presenta un periodo di ampiezza eguale a tre volte la vibrazione del Sol_1; come la figura 3, che non è altro che la traccia della figura di Lissajous, imagine di $\frac{5}{3}$.

Si vede che la combinazione $\frac{m}{n}$ di due suoni che si ottiene per la sovraposizione dei due movimenti periodici semplici nel mezzo di propagazione, dà origine ad un nuovo

movimento periodico composto, che crea una nuova sensazione. *L' intervallo* dunque è un *nuovo fattore elementare*, definito

TAVOLA I.



1 e 2 sinusoidi delle vibrazioni del Sol_1 e del Mi_2
3 composizione perpendicolare — 4 composizione parallela.

dal rapporto $\frac{m}{n}$ e dalla durata del periodo T, come il suono lo è dalla vibrazione e dalla sua durata.

3. Legge di periodicità degli intervalli.

Uno stesso *intervallo* ha sempre la stessa grandezza sia che si prenda tra i suoni gravi o tra i suoni acuti, cioè il suo rapporto $\frac{m}{n}$ *è costante*, ma per la (3) il *periodo varia proporzionalmente alla durata delle vibrazioni dei due suoni*. In altre parole col crescere dell' altezza assoluta dei due suoni resta costante l' altezza relativa, ma si abbrevia il periodo.

Ne segue che diversi intervalli possono avere lo stesso periodo. Per esempio, *la serie armonica:*

$$1:2:3:4:5:6:7:8:9:\ldots\ldots$$

si può definire: *una serie di suoni così distribuiti che presi due a due formano intervalli che hanno tutti lo stesso periodo.*

Ma questo è un caso particolare che non è sufficiente per la musica. Ciò che importa è di confrontare i diversi intervalli in una stessa regione della gamma per es. entro una stessa ottava.

Prendo un suono o vibrazione di durata τ e con esso compongo diversi altri suoni più acuti $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$. Così ottengo altrettanti intervalli che hanno lo stesso suono fondamentale. Pongo dunque:

$$\frac{\tau}{\tau_1} = \frac{m_1}{n'} \qquad \text{Donde:} \qquad n'\tau = m_1\tau_1 = T_1$$

$$\frac{\tau}{\tau_2} = \frac{m_2}{n''} \qquad\qquad n''\tau = m_2\tau_2 = T_2$$

$$\frac{\tau}{\tau_3} = \frac{m_3}{n'''} \qquad\qquad n'''\tau = m_3\tau_3 = T_3$$

$$\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots$$

dividendo si ottiene:

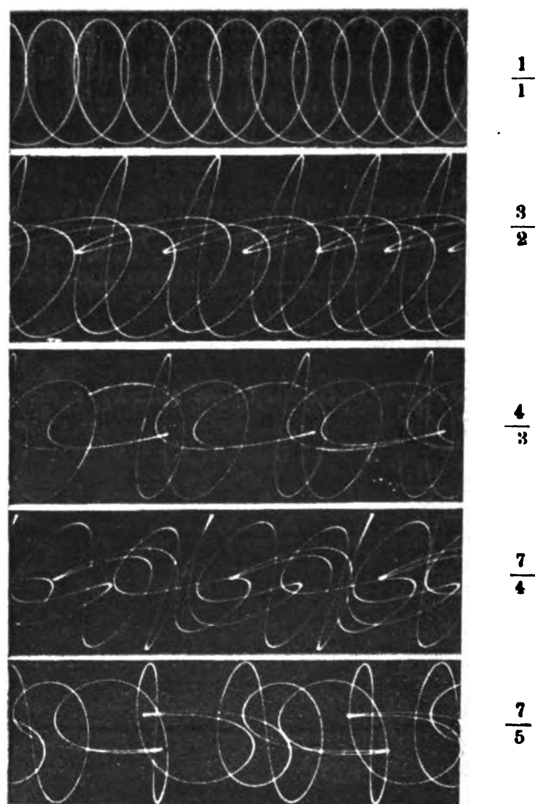
$$T_1 : T_2 : T_3 : \ldots = n' : n'' : n''' : \ldots$$

Le durate dei periodi dei rapporti che si ottengono paragonando diversi suoni collo stesso suono; stanno come i numeri di vibrazioni del suono fondamentale che entrano in ciascun rapporto.

Per ragioni estetiche torna conto prendere per unità di misura del tempo la durata della vibrazione del suono fondamentale o più basso; allora il periodo è misurato dal denominatore del rapporto stesso.

Presento un saggio della verificazione sperimentale di questa legge, nella:

TAVOLA II.



Traccie della composizione perpendicolare delle vibrazioni di cinque intervalli semplici.

Ho composto perpendicolarmente le vibrazioni dei cinque suoni di: 128 — 192 — 170,66... — 224 — 179,2 vibr. s. al secondo colla vibrazione del suono: 128 v. s., e tracciate le figure corrispondenti sopra una lastra mobile. È evidente che dalla lunghezza dei periodi sulle traccie, si può misurare la durata del periodo di ciascun rapporto, quando si conosca la velocità della lastra. Per la legge basta prendere per unità di misura il periodo di $\frac{1}{1}$ e si vede subito che il periodo di

$\frac{3}{2}$ è doppio, quello di $\frac{4}{3}$ è triplo e così di seguito cioè i rapporti

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}$$

hanno i periodi:

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5$$

La legge è perfettamente confermata, e si può rendere ancora più palpabile coll' apparecchio dei pendoli composti.

Osservazione. Io ho fatto la verifica su larga scala osservando le traccie degli intervalli che si ottengono passando quasi con continuità dall' unissono all' ottava. Risulta che la maggior parte degli intervalli hanno periodi lunghissimi o non ne hanno punto. Di questi casi ho fatto un' ampia esposizione nella memoria: Le figure di Lissajous nell' estetica dei suoni [1]).

4. Accordi di più suoni.

L' esperienza dimostra che più suoni prodotti simultaneamente possono creare diverse sensazioni:

a) Combinazioni di suoni formanti *timbro.* Moltissimi suoni semplici *non danno sensazione che d' un suono solo* fondamentale che presenta diversi caratteri secondo il numero e la qualità dei suoni sovraposti.

b) Combinazioni di suoni formanti *rumori.* In questo caso non solo manca una sensazione individua e determinata, ma neppure si possono discernere i singoli suoni.

c) *Combinazioni formanti accordo musicale* che hanno due caratteri: quello di *fusione* per cui più suoni contemporanei producono una nuova sensazione individua e determinata, e quello di *contrasto* per cui i suoni si possono riconoscere ad orecchio. È quest' accordo che in arte si considera come un *terzo fattore elementare* la cui introduzione nella musica, determinò *un vero e proprio sistema* musicale.

1) Rivista musicale it., Vol. 10, fasc. 1 e 2, 1903.

Elemento materiale è il suono; l' *intervallo* composto di due suoni è *elemento organico;* l' *accordo* come *sistema d' intervalli* forma *un tessuto organico.*

Considero l' *accordo* come sistema di intervalli che più suoni fanno contemporaneamente col suono fondamentale o più basso. Così i suoni N_1, N_2, N_3... che col suono N formano i rapporti $\frac{N_1}{N}$, $\frac{N_2}{N}$, $\frac{N_3}{N}$.... presi insieme danno l' accordo:

$$(4) \quad N : N_1 : N_2 : N_3 : \ldots = an : an_1 : an_2 : an_3 : \ldots = n : n_1 : n_2 : n_3 \ldots$$

Applicando la interpretazione fisica, come per la definizione di intervallo, si riconosce che il sistema di rapporti ridotto ai minimi termini, significa che mentre il primo suono compie n vibrazioni, il secondo ne compie n_1; il terzo n_2 ecc. ma a determinare l' accordo bisogna tener conto del fattore di riduzione a. Segnando τ, τ_1, τ_2, τ_3 ... le durate delle vibrazioni si ricaverà il tempo richiesto a formare il gruppo (n, n_1, n_2, n_3....), che è la *durata del periodo dell' accordo.*

$$n\tau = n_1\tau_1 = n_2\tau_2 = \ldots = \Theta = \frac{1}{a}.$$

Dunque l' accordo $N : N_1 : N_2 : N_3 : \ldots$. non è determinato completamente dai rapporti: $n : n_1 : n_2 : n_3 : \ldots$. che misurano soltanto la grandezza degli intervalli; ma è necessario tener conto del numero a di gruppi ($n\, n_1\, n_2\, n_3$....) di vibrazioni che si compiono in un secondo, ossia della durata del gruppo o del periodo: $\Theta = \frac{1}{a}$.

Per rappresentarci graficamente come più suoni simultanei possano formare accordo, cioè creare un *nuovo fenomeno periodico con propria sensazione*; basta ricorrere alla composizione di più movimenti vibratori corrispondenti ai suoni. Si ottiene un unico movimento risultante, di forma non sinusoidale, come quella dei semplici suoni, ma avente un proprio periodo.

Ho già pubblicato un metodo [1]) di rappresentare ottica-

1) Atti della R. Accad. dei Lincei, S. 5, vol. 12, pag. 48.

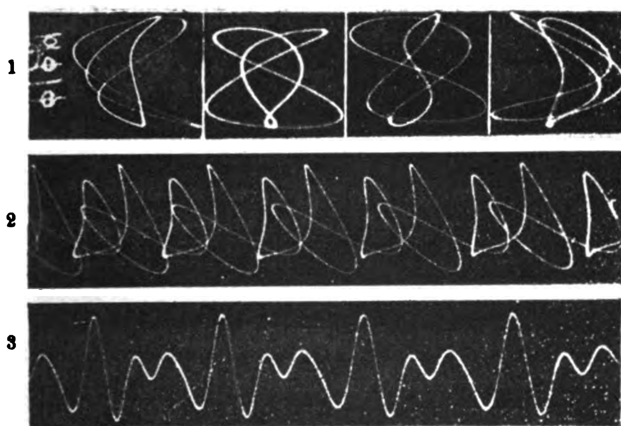
mente l' imagine di *qualunque accordo*, analoga alla figura di Lissajons d' un intervallo.

5. Dimostrazione sperimentale del periodo degli accordi.

Per comporre più suoni simultaneamente collo stesso suono, cerco la risultante della composizione parallela delle loro vibrazioni, e la compongo perpendicolarmente colla vibrazione del suono fondamtale. Così ottengo una figura chiusa che è imagine ottica dell' accordo, come la figura di Lissajous lo è dell' intervallo. Il tempo che il raggio luminoso impiega a descrivere la figura chiusa, è il periodo dell' accordo.

Eccone un saggio nella seguente :

TAVOLA III.



1 Fasi dell' accordo $Sol_1 : Re_2 : Sol_2$ — 2 Traccia d' una fase
3 Traccia della composizione parallela.

Il numero 1 presenta quattro figure chiuse, che sono fasi diverse della imagine ottica dell' accordo :

$$\text{Sol}_1 : \text{Re}_2 : \text{Sol}_2 = 182 : 273 : 364 = 2 : 3 : 4 .$$

I periodi sono messi in evidenza nel n. 2 che è la traccia d' una fase sopra un piano mobile. Misurando le ampiezze

ossia distanze di punti di egual fase e la velocità di traslazione della lastra fotografica, si conosce il tempo del periodo che è = 2 cioè *due volte la durata della vibrazione del* Sol$_1$, suono fondamentale che prendo come termine di confronto.

Lo stesso risulta dalla traccia, n. 3, della composizione parallela delle stesse vibrazioni, avvertendo che la maggior ampiezza dei periodi si deve alla maggior velocità della lastra, non all' accordo stesso.

Dunque la Tavola III dimostra *la esistenza del periodo, il modo di misurarlo, e la possibilità di paragonare tra loro i periodi di accordi diversi.*

Siccome uno stesso accordo, come un intervallo, cambia periodo, collo spostarsi nel campo dei suoni, proporzionalmente alle durate delle vibrazioni o nell' inversa delle altezze; così *più accordi sono comparabili quando hanno lo stesso suono fondamentale*, che si assume come termine di confronto.

Ecco i risultati di alcune misure dirette:

Accordi	Rapporti	Periodi
Sol$_1$: si$_1$: re$_2$	= 4 : 5 : 6	4
Sol$_1$: si$_1$: sol$_2$	= 4 : 5 : 8	4
Sol$_1$: re$_2$: si$_2$	= 2 : 3 : 5	2
Sol$_1$: sol$_2$: si$_2$	= 2 : 4 : 5	2
Sol$_1$: re$_2$: (fa$_2$)	= 4 : 6 : 7	4
Sol$_1$: do$_2$: mi$_2$	= 3 : 4 : 5	3
Sol$_1$: mi$_2$: sol$_2$	= 3 : 5 : 6	3
Sol$_1$: re$_2$: sol$_2$: si$_2$	= 2 : 3 : 4 : 5	2
Sol$_1$: sol$_2$: si$_2$: re$_3$	= 2 : 4 : 5 : 6	2
Sol$_1$: si$_1$: re$_2$: (fa$_2$)	= 4 : 5 : 6 : 7	4
Sol$_1$: re$_2$: (fa$_2$) : sol$_2$: si$_2$	= 4 : 6 : 7 : 8 : 10	4

I periodi dei diversi accordi sopra uno stesso suono stanno come i rispettivi numeri di vibrazioni di quel suono; questi ne misurano la durata quando si prenda la vibrazione del suono stesso come unità di tempo.

Accordi di tre o quattro suoni che abbiano periodi relativamente brevi sono assai pochi.

6. Carattere sintetico ed analitico degli accordi.

La serie armonica si può riguardare come un caso particolare di combinazione di suoni, o accordo che ha delle proprietà singolari:

Un accordo che ha per fondamentale il primo suono della serie armonica:

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : \ldots\ldots$$

ha sempre lo stesso periodo = 1 *qualunque sia il numero dei suoni componenti purchè appartengano alla serie.*

La serie è un accordo d'un numero infinito di suoni: esso ha questa proprietà, che la esclusione d'un numero qualunque di suoni non turba il periodo.

Io chiamo così fatte combinazioni d'armonici, *accordi timbro* perchè piucchè costituire un organismo, essi sono *un solo suono composto* con propria fisonomia, i suoni superiori sono una qualità o colorazione del fondamentale.

Astraendo dalla intensità dei suoni io considero come condizione di *massima fusione* il fatto che i rapporti formanti un accordo abbiano lo stesso periodo; perchè nè ad orecchio, nè ad occhio sulle traccie dell'accordo, si possono discernere i suoni componenti.

Al contrario il periodo dei singoli intervalli costituenti l'accordo dal quale dipende il periodo dell'accordo stesso, può servire di criterio di *distinzione o di contrasto*. Infatti l'introduzione d'un *intervallo a periodo lungo*, basta per diminuire l'unità individuale dell'accordo rendendolo dissonante o stonato.

Il vero accordo sarà quello che ha *massima fusione* di suoni per brevità di periodo, ma presenta i caratteri di contrasto.

Tale è l'*accordo perfetto*:

$$\text{Do} : \text{mi} : \text{sol} = 4 : 5 : 6\,.$$

Il suo periodo è = 4, cioè quattro volte quello della vibrazione del Do suono fondamentale. Paragonando i tre in-

tervalli secondo la regola data si trova che hanno i seguenti periodi :

$$\frac{5}{4} \qquad \text{periodo } 4$$

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad \text{»} \quad 2$$

$$\frac{6}{5} \qquad \text{»} \quad 5$$

Non esiste combinazione di tre suoni che abbia periodo più breve e insieme consti di intervalli di diverso periodo.

Riassumendo, si vede che i suoni gli intervalli e gli accordi sono definiti fisicamente da tre forme di movimenti periodici :

Il *suono* dalla vibrazione e dalla durata,

l' *intervallo* dal rapporto di vibrazioni e dalla durata del suo periodo,

l' *accordo* da più rapporti di vibrazioni, dalla durata del periodo proprio dell' accordo, e dalla durata relativa dei periodi dei diversi intervalli che lo compongono.

Resta ora a vedere come la *durata del periodo* serva di criterio per classificare questi tre fattori dell' arte.

Osservazione. — L' importanza che s' è data dai fisici e dai musici alla serie e al fenomeno dei suoni armonici ha valicato ogni confine non solo della scienza ma anche del buon senso. Basta osservare che la serie non può fornire il materiale musicale nè anche per una *breve frase.* Per esempio dei sette suoni che compongono la *scala diatonica* ne mancano due in una stessa serie il Fa e il La. Infatti scrivendo la serie :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} Do_1 : & Do_2 : & Sol_2 : & Do_3 : & Mi_3 : & Sol_3 : & (Si_3\flat) : & Do_4 : & Re_4 : & Mi_4 : & (Fa_4\sharp\text{-}) : & Sol_4 : & \ldots \\ 1 : & 2 : & 3 : & 4 : & 5 : & 6 : & 7 : & 8 : & 9 : & 10 : & 11 : & 12 : & \ldots \end{array}$$

essi non si riscontrano punto.

7. Equazioni degli accordi di più suoni.

A complemento del capitolo è utile coordinare a quest'ordine d' idee anche le formole matematiche della composizione delle vibrazioni sonore. Come esempio darò la espressione analitica del *mio metodo di rappresentazione ottica degli accordi musicali.*

Produco due o più suoni (p. e. con canne d' organo) dinanzi ad una membrana tesa uniformemente. Essa assume un movimento in avanti e indietro, che equivale alla risultante della composizione parallela delle vibrazioni di quei suoni. Compongo questa risultante colla vibrazione d' un diapason che vibra perpendicolarmente ad essa, ed ottengo *una figura ottica di tre o più suoni*, analoga a quella che Lissajous ha ottenuto per due suoni.

Come la figura di Lissajous si ricava eliminando t dalle due equazioni che segnano le vibrazioni di due suoni una lungo l' asse delle x e una lungo l' asse delle y;

$$x = a_1 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi t}{\tau_1} - \varphi_1\right]$$

$$y = a \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi t}{\tau} - \varphi\right]$$

dove x e y segnano gli spostamenti lungo gli assi in ogni istante t, a_1 a sono le ampiezze, τ_1 e τ le durate delle vibrazioni dei due suoni, φ e φ_1 le fasi; così la risultante di due o più suoni lungo l' asse delle x sarà data dalla somma degli spostamenti; e la mia figura di più suoni, si otterrà eliminando t dalle due equazioni:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots = a_1 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi t}{\tau_1} - \varphi_1\right] + a_2 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi t}{\tau_2} - \varphi_2\right] + \ldots \\ y = a \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi t}{\tau} - \varphi\right]. \end{cases}$$

Per mettere in evidenza il periodo dell' accordo basta sostituire alle durate delle vibrazioni τ, τ_1, τ_2 ... i valori ricavati

dalla formola (5) che segna la condizione perchè più suoni formino accordo:

(5) $$n\tau = n_1 \tau_1 = n_2 \tau_2 = \ldots = \Theta$$

cioè:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{n}{\Theta}, \quad \frac{1}{\tau_1} = \frac{n_1}{\Theta}, \quad \frac{1}{\tau_2} = \frac{n_2}{\Theta}, \ldots .$$

L' equazione prende la forma:

$$\begin{cases} x = a_1 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi n_1 t}{\Theta} - \phi_1\right] + a_2 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi n_2 t}{\Theta} - \phi_2\right] + \ldots . \\ y = a \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi n t}{\Theta} - \phi\right] \end{cases}$$

Così si ha propriamente l' equazione della figura completa dell' accordo: $n : n_1 : n_2 : \ldots .$

Infatti ciascun termine contiene il minimo numero di vibrazioni che si compiono in egual tempo, e passato il quale, si ripete la stessa traiettoria periodicamente. Questo tempo che misura il periodo proprio dell' accordo è: Θ comune a tutti i termini che riprendono lo stesso valore ogni volta che: $t = \Theta$ per coincidenza della stessa fase.

Certamente questo modo di rappresentare la composizione dei movimenti vibratorio, è tutto proprio a tradurre in equazione la concezione sintetica dell' accordo da me adottata, considerandolo come un individuo a se; perchè mentre nelle prime equazioni apparivano le singole vibrazioni colle durate $\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2} : \ldots$ alle quali potrebbero sostituirsi i numeri N, N_1, N_2 .... di vibrazioni al secondo; quì non apparisce, nè una cosa nè l' altra, ma figura il gruppo $(n, n_1, n_2 \ldots)$ di vibrazioni e il periodo Θ, elementi necessari e sufficienti a definire l' accordo.

Anche la serie di Fourier può considerarsi sotto i due aspetti, o comune somma di suoni e vibrazioni, o come accordo; secondo che si mette in evidenza o la durata della vibrazione corrirpondente a ciascun termine:

$$A\cos 2\pi\left[\frac{t}{\tau} - \phi\right] + A_1 \cos 2\pi\left[\frac{t}{\frac{\tau}{2}} - \phi_1\right] + A_2 \cos 2\pi\left[\frac{t}{\frac{\tau}{3}} - \phi_2\right] + \ldots$$

ovvero quante vibrazioni di ciascun suono si compiono in egual tempo, che è misurato dal periodo comune equivalente alla durata della vibrazione del primo suono:

$$A\cos 2\pi\left[\frac{t}{\tau}-\varphi\right]+A_1\cos 2\pi\left[\frac{2t}{\tau}-\varphi_1\right]+A_2 2\cos\pi\left[\frac{3t}{\tau}-\varphi_2\right]+\ldots$$

Questa è nè più nè meno, l' equazione dell' *accordo timbro*: 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : .... di periodo τ; che è $\tau=1$ quando si prenda per unità di tempo la durata della vibrazione del suono fondamentale.

Nulla vieta di considerare l' equazione d' un accordo qualunque come risultante dalla serie quando si annullino tutti gli altri termini fuorchè l' n^{mo}, l' n_1^{mo}, n_2^{mo}, ...

8. Percezione dei suoni.

Ho dimostrato che *i suoni, gli intervalli* e *gli accordi* si possono definire fisicamente come *fenomeni periodici diversi* che agiscono sul nostro orecchio. Il periodo può servire di criterio per paragonare suoni con suoni, intervalli con intervalli, accordi con accordi, e per classificarli. Resta ora a vedere come una così semplice concezione si presti alla spiegazione dei fenomeni fisiologici.

Senza preoccuparmi del meccanismo dell' audizione tengo conto soltanto della *costante fisiologica del tempo,* cioè: del tempo che passa dall' istante dell' impressione esterna, all'atto della percezione interna che compie la sensazione. Dicesi *costante* perchè è *comune a tutti i sensi ed è incirca* $^1/_{15}$ *di secondo.*

Con numerose esperienze ho verificato questi due dati fondamentali.

Limite inferiore dei suoni. — Il limite fisico di 16 vibrazioni al secondo significa, che al di sotto l' orecchio percepisce le singole vibrazioni come impulsi; il suono è *una sensazione continua* per cui si richiede che l' azione d' un impulso non cessi prima che incominci la seguente. Il limite dipende dunque dalla costante personale mutata la quale si sposterebbe anch' esso.

Regione oscura. — Colla frequenza delle vibrazioni si va facendo più nitida e definita la percezione del suono, ma non si raggiunge la perfetta continuità della sensazione se non per più di 130 vibrazioni al secondo. Per la natura stessa dell'impulso vibratorio la cui energia varia in ragione del quadrato della velocità, la sensazione ha un massimo e un minimo di intensità. L' orecchio percepisce le vibrazioni sinteticamente come suono o sensazione continua, e analiticamente come impulso. È noto che pel suo grado di sensibilità l' orecchio può avvertire un fenomeno che dura meno d' un centesimo di secondo.

Massimo di chiarezza. — Il fatto stesso delle divergenze tra i fisici nel fissare i limiti superiore ed inferiore, il fatto che l' arte si contiene in limiti ancora più ristretti, dimostrano che esiste una regione media nella quale la sensazione sonora raggiunge il massimo di perfezione. Come dipenda ciò dalla costante del tempo si può illustrare con un esempio volgare.

Il *fonografo* e il *cinematografo* creano una sensazione continua di massima chiarezza all' orecchio e all' occhio per una certa velocità di movimento; se la velocità rallenta o accelera oltre un limite cessa la sensazione continua del fenomeno per entrambi i sensi.

Osservazione. — Se vogliamo misurare il *grado di chiarezza* dal rapporto della frequenza delle vibrazioni alla costante del tempo fisiologica, si possono fissare i limiti in altro modo. Per es. ritenuto che la regione chiara sia compresa nei limiti delle voci umane da 150 a 2500 v. s. al secondo; si dirà che incomincia pura sensazione continua, quando durante la costante si compiono $\frac{150}{15} = 10$ vibraz. incirca; che si ha sensazione confusa per più di $\frac{2500}{15} = 166$ v. s. *Il centro di massima chiarezza* sarebbe al $Re_3 = 589{,}4$; quindi $\frac{587.4}{15} = 39{,}1$; in cifra rotonda per 40 vibr. semp. che si sovrappongono durante l' atto della sensazione.

11. Percezione degli intervalli.

Enumero ora i fenomeni degli intervalli che si spiegano prontamente confrontando colla costante personale del tempo la durata del loro periodo. Essi sono analoghi a quei fenomeni dei suoni che dipendono dalla durata delle vibrazioni, come risulta dalla dimostrazione sperimentale.

Ogni intervallo ha un proprio limite inferiore. Significa, che non basta che due suoni si percepiscano singolarmente, per poter percepire il loro intervallo. Ecco alcune misure dirette:

Rapporti	$\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$
Limite inferiore approssimato	$\frac{20}{20}$, $\frac{34}{17}$	$\frac{54}{36}$	$\frac{80}{60}$	$\frac{100}{60}$	$\frac{100}{80}$

Le misure furono fatte ad orecchio e controllate osservando ad occhio le figure ottiche: tenuto conto dell' errore personale d' apprezzamento la legge è evidente: come pel suono si richiedono da 16 a 20 vibrazioni al secondo; così per avere la sensazione d' un intervallo $\frac{m}{n}$, si richiede la ripetizione periodica del gruppo (m, n) di vibrazioni da 16 a 20 volte al secondo, ossia che il periodo dell' intervallo non superi il $\frac{1}{16}$ di secondo. Ne segue che un intervallo tanto più basso ha il limite quanto più breve è il periodo; epperciò ha un campo più esteso nella gamma dei suoni dove si può riconoscere.

Regione oscura. — L' idea di chiarezza si attribuisce con più precisione all' intervallo che al suono. L' orecchio può apprezzare non solo *qualitativamente*, ma anche *quantitativamente l' intervallo*. Chiamo oscura quella regione della gamma dove l' intervallo si può riconoscere più o meno direttamente, ma l' orecchio non può determinare ossia intonare con precisione. L' oscurità dell' intervallo dipende dalla intermittente fusione dei due suoni che si percepiscono distinti, laddove nelle regioni alte prevale la sensazione propria dell' intervallo, che

coll' attenzione appena si risolve nei suoni elementari. Tuttociò si spiega prontamente dalla relazione del periodo colla costante interna del tempo, così come pei suoni bassi.

Massimo di chiarezza. — La regione di massima chiarezza degli intervalli coincide all' incirca con quella de' suoni, per varie cause. Spiegherò la cosa con un esempio: La *quinta* è l' intervallo tipico e singolare che presenta tutti i caratteri. Nei limiti de' suoni musicali essa si può apprezzare e determinare colla massima perfezione. Essa serve di base per l'accordatura degli istrumenti, ogni mediocre musico la sa riconoscere e discernere. Ma nelle regioni dei suoni acuti la fusione dei due suoni è tale che anche ad orecchio esperto riesce difficile analizzarla; sembra un solo suono con proprio timbro.

Ivi la quinta ha un imagine talmente individuata, che per fusione de' suoi due suoni s' assomiglia all' intervallo d' ottava che non raramente si confonde con un sol suono anche dai musici.

Dunque nelle *regioni basse* manca la fusione per periodo troppo lungo e prevale la sensazione singolare dei suoni; nelle *acute* il periodo del rapporto raggiunge il grado di massima chiarezza (come s' è detto per i suoni); quindi prevale la sensazione dell' intervallo sui singoli suoni che sono fuori dei loro limiti di chiarezza e nasce il carattere di timbro; nella *regione media* l' orecchio percepisce sinteticamente e analiticamente l' intervallo. Ciò che costituisce una delle più belle doti dei musici nell' ascoltare una esecuzione è il comprendere tutto l' insieme e seguirne tutto l' intreccio delle parti: ciò è possibile solo quando i suoni si fondono senza confondersi.

12. Classificazione degli intervalli.

Se chiamiamo *consonanza* la tendenza di due suoni a combinarsi in modo da produrre *una sensazione unica* di intervallo, e *dissonanza* la tendenza a mantenere la propria individualità che si oppone alla formazione della sensazione unica; si vede subito che la base di questa *classificazione* è quella stessa che vale per i suoni. Il grado di consonanza dipende

dagli elementi costituenti l' intervallo $\frac{m}{n}$ [gruppo di vibrazioni (m, n) e durata del periodo] in relazione alla costante del tempo che definisce le condizioni e i limiti di chiarezza.

Applico questo criterio per classificare gli intervalli che hanno per base il suono: 600 v. s. al secondo, posto all' incirca nel centro di massima chiarezza dei suoni:

Intervalli	$\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$	$\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$	$\frac{9}{8}$ ...
N. di vibrazioni	2, 3	5	7, 8	9, 11	11, 12, 13	17
Periodo in sec.	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{75}$
G. di chiarezza	40	20	13	10	8	5
Consonanza	assoluta	perfetta	medie		imperfette	dissonanze

di due intervalli che hanno lo stesso periodo p. e. $\frac{4}{3}$, e $\frac{5}{3}$ quello è più consonante che consta di minor numero di vibrazioni. Le durate dei periodi in secondi si calcolano subito, essendo proporzionali a denominatori dei rapporti. Il grado di chiarezza è dato dal numero dei periodi che un intervallo compie durante $\frac{1}{15}$ di secondo, che suppongo equivalere alla costante fisiologica.

Helmholtz fa consistere il carattere delle dissonanze nella *intermittenza della sensazione* che attribuisce ai battimenti. Lasciando ad altro lavoro la discussione dei principi, osservo che si spiega più direttamente col dire che la lunga durata del periodo non produce pura *sensazione continua* come per i suoni, ma permette all' orecchio di avvertire le variazioni periodiche.

Con questo criterio la classificazione è ben definita. Consonanze assolute (unissono e ottava) perchè sono tali in tutta la regione dei suoni. Consonanza perfetta (quinta) in tutta la regione dei suoni musicali. Consonanze medie in parte della regione musicale perchè verso il limite inferiore hanno periodo troppo lungo ecc. In altre parole preso come massimo

di chiarezza la frequenza del periodo che da 40 periodi ogni *quindicesimo* di secondo; si avrà per massimo di chiarezza degli intervalli le seguenti posizioni :

Intervallo	unissono	quinta	quarta sesta magg.	terza magg. sett. acustica	sesta min. terza min.
suono fondamentale	600v	1200	1800	2400	3000

Quindi la terza e sesta minore hanno il massimo di chiarezza vicino al limite superiore dei suoni musicali e tutti gli altri intervalli di periodo maggiore epperciò dissonanti fuori del limite. Ecco che soltanto pochi intervalli soddisfano alla condizione fisiologica di essere chiaramente e direttamente apprezzati *entro i limiti dei suoni musicali* per la relativa brevità del loro periodo; tutti gli altri entro questa regione sono rispetto all' orecchio così come i suoni bassi al disotto del limite musicale, cioè di periodo così lungo da creare sensazione non ben definita cioè di carattere misto continuo e intermittente. Forse è questo il caso di dire che l' *educazione dell' orecchio* ad apprezzarli sinteticamente e analiticamente, ci ha abituati a sentirne il valore estetico; mentre nol sentirono gli antichi.

Percezione indiretta degli intervalli.

Si percepiscono indirettamente gli intervalli che in musica si sogliono chiamare *crescenti o calanti*, perchè differiscono di poco da uno degli intervalli *tipici* [unissono, ottava, quinta, quarta, terze e seste] che servono, come osserva Guido d'Arezzo, di *chiavi* per interpretare una composizione musicale.

Carattere dell' intervallo stonato è di avere un periodo lunghissimo: per es. $\frac{301}{200}$ ha un periodo che dura un secondo; ma l' orecchio percepisce una quinta $\frac{300}{200}$ un po' crescente. L' approssimazione si spiega così: L' imagine ottica del rapporto $\frac{301}{200}$ è complicatissima, ma consta di forme elementari

(in numero di 200) simili alle figure della quinta $\frac{3}{2}$, colla differenza che se la quinta è giusta presenta tutte le fasi successivamente in un secondo: *sembra mobile!* In realtà è un illusione ottica dipendente dalla costante del tempo, [si suol dire persistenza della imagine nella retina (?)].

Come l'occhio crede vedere lo svolgersi delle figure della quinta, così l'orecchio percepisce direttamente i periodi elementari un po' alterati della quinta e s'accorge dell'alterazione o stonatura per una perturbazione periodica al secondo che chiamasi *battimento*.

Legge dei rapporti semplici.

In luogo di considerare i rapporti $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ come valori numerici pei quali manca un *criterio di semplicità*; io applico l'interpretazione fisica data, e dico che è più semplice quell'intervallo che è prodotto elementarmente da *minor numero di vibrazioni ed ha periodo più breve*. Dal confronto della durata del periodo dei diversi intervalli colla costante del tempo auricolare, si vede che l'orecchio è in grado di apprezzare direttamente con più precisione e su più vasta scala quegli intervalli che hanno periodo più breve e che si riducono a piccol numero. *Se mutasse la costante del tempo si sposterebbe tutto il campo musicale dei suoni*. Ecco che l'interpretazione fisiologica porta nel campo della realtà oggettiva, quella legge che sembrava una mera coincidenza matematica od una preferenza spirituale. Le condizioni fisiologiche impongono due limiti: quei fenomeni periodici che entro quei limiti hanno durata di periodo richiesto dalla costante del tempo per una chiara percezione, forniscono il materiale della musica in generale; gli intervalli dissonanti che hanno il periodo troppo lungo, ma hanno relazione d'affinità coi tipici, benchè nei limiti sieno ambigui e oscuri in se stessi; nel contesto tonale hanno acquistato una potenza espressiva tutta nuova e di grande efficacia nel sistema armonico moderno. Sotto questo aspetto si vede che la legge di semplicità non è

assoluta, cioè nel senso che la musica si *serva soltanto* di intervalli semplici o dei più semplici, *ma relativa* nel senso che la musica si serve di quelli intervalli più semplici che soddisfano al principio estetico che la informa come vedremo.

13. Applicazione all' arte.

Esperienza fondamentale. — Noi non possiamo dai fenomeni fisici e fisiologici arguire l' esistenza e la natura dei fenomeni estetici. Il primo passo della fisica nel campo della musica dev' essere quello di constatare con misure di precisione, di quali *suoni, intervalli* e *accordi* l' arte si serva per esprimere e suscitare i moti dell' anima.

Il metodo di misura più diretto e decisivo è senza dubbio quello di Cornu e Mercadier: Registrare le vibrazioni dei suoni quando si eseguisce musica in modo da soddisfare pienamente l' orecchio e l' arte.

Il risultato genuino di sì fatte esperienze, si riassume in poche parole: L' arte nostra si svolge tutta sugli intervalli contenuti nella scala naturale o derivati da essa [1]). Chiamo *intervalli derivati* quelli che equivalgono alla somma o differenza di due intervalli della scala; la misura di tali intervalli si ottiene moltiplicando o dividendo i rapporti corrispondenti.

In base a questa esperienza, enumero i fatti estetici che si spiegano prontamente colla teoria acustica data.

a) **Funzione tonale dei suoni.** — *Uno stesso suono ha diverso valore e significato estetico secondo la tonica alla quale si riferisce.*

È chiaro che ciò dipende dall' intervallo che esso fa colla tonica: ora s' è detto che ad ogni intervallo risponde una data sensazione, non solo secondo *la natura* dell' intervallo, ma secondo *la posizione* che dipende *dalla durata del periodo*. L' *affinità* colla tonica è misurata dalla facilità con cui si apprende la sua relazione, che cresce colla *brevità* del periodo.

b) **Tonalità.** — *Il genio musicale creò il sistema armonico servendosi di tutti quei suoni che hanno una affinità*

1) Rivista musicale it. vol. 8, 1901.

apprezzabile con un dato suono, per una composizione musicale.

Evidentemente nell' assumere un suono come termine di confronto il genio non ha fatto che sentire e seguire la condizione fisiologica per avere determinate sensazioni dalle vibrazioni dei corpi, e per classificarle.

Ogni suono, facendo diverso intervallo colla tonica ha, rispetto agli altri, una propria *funzione tonale* o attitudine a creare una data sensazione. L' insieme di queste varie funzioni che irradiano da un suono, come da centro, costituisce la tonalità, che costituisce il principio fondamentale d' unità estetica d' una composizione.

c) **Funzione tonale degli intervalli.** — *Uno stesso intervallo ha esteticamente diverso valore secondo la posizione che occupa rispetto alla tonica.* — Ciò avviene non solo perchè considerato in se stesso l' intervallo muta il periodo collo spostarsi nella gamma; ma principalmente perchè mutano periodo e natura i due intervalli che i suoi due suoni fanno colla tonica, dei quali lo stesso intervallo è una derivazione; infatti anche la funzione dell' intervallo risulta dalla composizione delle funzioni tonali dei due suoni. Per es. una *quinta giusta* non solo ha diversa funzione nei diversi gradi della scala, ma anche produce stonatura secondo i rapporti dei suoni colla tonica.

d) **Consonanze e dissonanze.** — *Gli intervalli considerati in se stessi presentano caratteri che piaciono o dispiaciono all' orecchio; ma il preciso concetto di consonanza e dissonanza sta in una funzione tonale determinata nel contesto, secondochè crea una situazione psicologica di riposo, ovvero di moto che fa sentire la esigenza di riudire un dato intervallo di riposo.*

Che un intervallo dia una imagine chiara e distinta, e un altro una imagine oscura e intermittente; è subito capito che dipende dalla durata del periodo che è più proporzionata all' orecchio o meno secondochè è contenuta nei limiti imposti dalla costante del tempo ovvero è lontana; ma ciò non può definire la consonanza, perchè avverrebbe che un intervallo semplice e preciso non istonerebbe mai. È col principio della

tonalità che è definita in ogni caso la funzione dell'intervallo; sia perchè i due suoni fanno colla tonica intervalli perfetti o intermittenti, sia perchè col riferire un intervallo alla tonica viene tolta ogni ambiguità sul significato estetico del legame di concatenazione. Ne segue che una dissonanza di cui si conosce la funzione tonale cioè in qual consonanza debba risolvere, produce una sensazione di piacere assai più viva che la consonanza.

e) **Criterio estetico di semplicità dei rapporti che misurano gli intervalli musicali.** — Il rapporto dell'intervallo di due suoni considerato in se stesso si potrà riconoscere più semplice d'un altro, secondo il numero di vibrazioni costituenti il gruppo (m, n) e la durata del periodo; *ma il vero criterio di semplicità in matematica non è assoluto ma relativo ad una data condizione.* Poniamo il problema:

Quali sono i rapporti più semplici che soddisfino al principio estetico della tonalità e sieno compresi entro i limiti d'una ottava : 2 : 1 ?

La risposta fu data dal Prof. Beltrami su questo periodico [1]) dove dimostrò che sono i rapporti contenuti nella scala naturale: $1 : \frac{9}{8} : \frac{5}{4} : \frac{4}{3} : \frac{3}{2} : \frac{5}{3} : \frac{15}{8} : 2$.

In altre parole la legge di semplicità ha un significato determinato che equivale a legge di minimo mezzo: cioè non esistono intervalli più semplici di quelli che il genio ha adottato, che sieno atti ad esprimere i fatti tonali. Il genio ha escluso quegli intervalli, più o meno semplici in se stessi, che non hanno una affinità apprezzabile colla tonica e cogli altri intervalli tonali.

Così per due vie si giunge alla determinazione della scala: coll'esperienza diretta sull'arte viva, e col calcolo appoggiato ad un fatto estetico indiscusso considerato come fondamentale in armonia.

14. Conclusione.

Questi accenni bastano per fare comprendere come si possa penetrare nei segreti dell'armonia, tenendo conto soltanto di

1) N. C., 3. serie, vol. 11, 1882.

ciò che costituisce l' essenza dei suoni e delle loro combinazioni; cioè delle vibrazioni sonore, e delle loro composizioni a due, a tre ecc.

Dal mio punto di vista i fenomeni dei battimenti, dei suoni risultanti d' ogni ordine, degli armonici ecc. non sono che effetto o conseguenza della composizione delle vibrazioni. Quindi essi non costituiscono direttamente il fenomeno musicale delle consonanze e dissonanze e tonalità; ma sono fenomeni secondari che accentuano il principale o danno ad esso una propria fisonomia e colorazione. Con una più diretta analisi dimostrerò che assumerli come base della teoria della musica, è non solo un invertire l' ordine naturale dei fatti, ma attribuire ad essi funzioni ed effetti che non possono avere perchè sproporzionati e spesso contradittori.

Per ora mi limito ad accennare in forma di ipotesi al principio sperimentale col quale si possono coordinare questi fenomeni alla teoria esposta. *Ogni variazione periodica dei suoni che soddisfi alle condizioni auditive dell' orecchio può dar origine ad una sensazione sonora.*

Le traccie della composizione delle vibrazioni di due o più suoni presentano appunto gli elementi sufficienti di tali variazioni per ispiegare la origine dei suoni risultanti e battimenti; e per indicare la natura degli armonici. La sovraposizione degli armonici ad un suono principale non è che un caso particolare di composizione di movimenti vibratori; ma il discernere ad orecchio (ovv. ad occhio sulle sinusoidi) l' armonico è possibile soltanto quando esso abbia una intensità prevalente sul suono fondamentale.

Così ho tracciato le linee generali d' una teoria acustica derivante da un sol punto di vista assai facile, e diretto; che non è altro che la definizione stessa del suono e delle combinazioni dei suoni in relazione alle condizioni fisiologiche dell' apparato auditivo.

R. Istituto Fisico di Roma
12 aprile 1905.

FORZE D'ATTRITO ED EQUAZIONI DEL MOVIMENTO NEI SISTEMI LIBERI.

Nota di E. DANIELE.

La considerazione esplicita dei vincoli è condizione essenziale perchè sussista la definizione di forza d'attrito quale fu data dal sig. Painlevé e da me estesa a sistemi materiali qualunque [1]). Ricorderò difatti che le forze d'attrito sono definite, nel caso più generale, da queste due proprietà: 1° il loro lavoro virtuale è uguale a quello delle resistenze complessive, — 2° le formole

$$(1) \qquad \delta x_i = \delta t\, \Sigma_j\, e_{ij}\, \rho_j$$

debbono fornire le componenti d'uno spostamento virtuale, essendo $x_1 \dots x_n$ le coordinate (di specie qualunque) del sistema, ρ_j la forza d'attrito relativa alla coordinata x_j, ed e_{ij} il complemento algebrico del coefficiente E_{ij} della forza viva nel determinante di questi coefficienti, diviso per il determinante medesimo. È appunto da queste due proprietà che si dedusse l'espressione analitica delle ρ come forme lineari di certi parametri μ in numero eguale al grado di libertà del sistema [2]): a base di quella deduzione stavano le equazioni dei vincoli o, se si vuole, le equazioni nelle δx_i che definiscono uno spostamento virtuale.

Supponiamo ora che sia dato un sistema olonomo, che chiameremo (X), a N coordinate $X_1 \dots X_N$ e che mediante le equazioni dei vincoli si siano espresse le X in funzione di n ($<$ N) parametri indipendenti $x_1 \dots x_n$; consideriamo allora il sistema (x) che risulta definito da queste n coordinate. In tali condizioni, se non vi ha più luogo a discorrere di resistenze vincolari, rimangono però sempre le resistenze dovute all'attrito, e dovrà essere possibile prenderle in considerazione.

1) Painlevé; Leçons sur l'intégr. des éq. de la méc., 5me leçon; Leçons sur le frott.; Paris, Hermann, 1895; Daniele: Sulla teoria mecc. dell'attrito; N. Cim. 1904.

2) Form. (9) della mia Nota citata.

Ora, delle loro due proprietà fondamentali enunciate la prima cessa d'avere un significato, per la mancanza delle resistenze vincolari; la seconda, a sua volta, non aggiunge nulla di nuovo, per essere le δx_i arbitrarie. L'esprimere le ρ_i mediante forme lineari delle μ, che rappresentava la riduzione di un sistema di elementi incogniti ad un altro contenente un numero minore di elementi, non ha quindi più, in un sistema materiale non soggetto a legami, che un'importanza formale.

L'aspetto però che si può dare alle forze d'attrito, ed in conseguenza alle equazioni del movimento, è abbastanza notevole perchè sia forse non inutile il considerare brevemente l'accennato caso meccanico; il quale, inoltre, diversifica essenzialmente, per ciò che riguarda le espressioni definitive delle forze d'attrito da introdursi nelle equazioni, dai casi in cui compaiono esplicitamente i vincoli, come verrà mostrato in fine.

1. L'espressione delle forze d'attrito, quale è data nella mia Nota citata, cioè

$$\rho_i = \Sigma_j \Sigma_s E_{ij} b_{js} \mu_s , \tag{2}$$

continua ad essere applicabile al caso di un sistema materiale ad n coordinate indipendenti. Se difatti $x_1 \dots x_n$ sono le coordinate del sistema, si potranno assumere esse stesse come parametri q, ponendo

$$x_1 = q_1 , \dots , \quad x_n = q_n ;$$

ed allora

$$b_{js} = \begin{cases} 1 \ (j = s) \\ 0 \ (j \text{ diverso da } s) \end{cases}$$

La (2) si riduce quindi a

$$\rho_i = \Sigma_j E_{ij} \mu_j . \tag{3}$$

Con questo non si è però fatto, nella rappresentazione parametrica delle ρ, un passo più in là, poichè colle (3) non

si fa altro che operare sulle ρ una sostituzione lineare invertibile; dalle (3) si ricaverebbe

$$(3') \qquad \mu_j = \Sigma_i \, E_{ij} \, \rho_i \, .$$

In realtà, siccome nelle (1) le δx_i sono affatto arbitrarie, tutte le volte che si sia eseguita sulle ρ una sostituzione lineare invertibile si potrà sempre dire che si sono rappresentate parametricamente le ρ. Del resto, l' equivalenza perfetta, anche dal lato meccanico, delle ρ e delle μ, risulta dall'osservare che il lavoro virtuale delle forze d' attrito si può scrivere, in virtù delle (3), sotto la forma

$$\Sigma \, \rho_i \, \delta x_i = \Sigma \, \mu_i \, \varepsilon_i \, ,$$

essendo $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ delle quantità infinitesime legate alle δx_i dalle relazioni

$$(4) \qquad \delta x_i = \Sigma_j \, e_{ij} \, \varepsilon_j \, ,$$

cioè costituiscono un sistema speciale di caratteristiche di uno spostamento virtuale del sistema materiale dato: le ρ e le μ non sono dunque altro che le forze d' attrito relative a due diverse specie di caratteristiche. Il rappresentare analiticamente le forze d' attrito colla formola (3) fa sì che il caso in discorso, di un sistema libero, rientri in quello generale di un sistema con vincoli qualunque.

2. La rappresentazione accennata non solo è opportuna analiticamente, ma in certo modo s' impone, se noi pensiamo il sistema non soggetto a legami dedotto da un altro con un numero maggiore di coordinate, ma collo stesso grado di libertà. Consideriamo, come si fece in principio, un sistema (X) a N coordinate $X_1 \ldots X_N$ legate da m equazioni finite contenenti, se si vuole, anche il tempo, e nella sua forza viva sia

$$T_2 = \frac{1}{2} \Sigma_i \, \Sigma_j \, F_{ij} \, X'_i \, X'_j$$

la parte omogenea di 2° grado nelle X'; siano ancora $x_1 \ldots x_n$ i parametri indipendenti mediante i quali si esprimono le X in virtù delle equazioni dei vincoli, e che noi assumiamo come

coordinate del sistema che fu chiamato (x). Indicando con $P_1 \dots P_N$ le forze d'attrito, si ha, applicando la (2), ove si dovrà scrivere $b_{js} = \frac{\partial X_j}{\partial x_s}$:

(5) $$P_i = \Sigma_j \Sigma_s F_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial x_s} \mu_s ,$$

ed il lavoro virtuale di queste forze è dato da

$$\delta L = \Sigma P_i \delta X_i .$$

Ma dalle relazioni

(6) $$X_i = X_i (x_1 \dots x_n t)$$

ricaviamo le altre

$$\delta X_i = \Sigma_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h} \delta x_h ,$$

che ci esprimono le componenti di uno spostamento virtuale di (X) in un dato istante mediante le componenti di uno spostamento virtuale di (x) nell' istante medesimo. Sostituendo in δL si ha :

$$\delta L = \Sigma_h \delta x_h \Sigma_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_h} ;$$

ponendo

(7) $$\sigma_h = \Sigma_i P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_h} ,$$

σ_h è nient' altro che la forza d' attrito relativa alla coordinata x_h nel sistema ridotto (x). Le (5) ci permettono di esprimere le σ_h mediante le μ ; si ha difatti, sostituendo nella (7) :

(8) $$\sigma_h = \Sigma_s E_{hs} \mu_s ,$$

essendo

(9) $$E_{hs} = \Sigma_i \Sigma_j F_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial x_h} \frac{\partial X_j}{\partial x_s} .$$

Vogliamo ora calcolare le forze d' attrito di (x) secondo la formola (3). La forza viva τ di (x) si ottiene ricavando dalla (6)

$$X'_i = \frac{\partial X_i}{\partial t} + \Sigma_h \frac{\partial X_i}{\partial x_h} x'_h$$

e sostituendo nella forza viva di (X); tenendo presente la (9), la parte di τ omogenea di 2° grado nelle x' è

$$\tau_2 = \frac{1}{2} \Sigma_h \Sigma_k E_{hk} x'_h x'_k .$$

Allora le forze d' attrito ρ_h sono date da

$$\rho_h = \Sigma_k E_{hk} \mu_k ,$$

e quindi sono le stesse σ_h delle (8). Così, l' esprimere le forze d' attrito di un sistema libero mediante le (3) equivale a considerare il sistema come dedotto da un altro vincolato, coll' eliminazione dei legami.

3. Un esempio semplicissimo di sistema non vincolato, soggetto all' azione dell' attrito, si ha in un punto mobile su una superficie scabra, quando i punti della superficie, data colla sua equazione cartesiana $f(x\,y\,z) = 0$ (che rappresenta il vincolo), si riferiscano ad un sistema di coordinate curvilinee u, v. La forza viva del punto, supposto di massa uno, è data, nel sistema cartesiano, da

$$T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

ed in corrispondenza si ottiene per le forze d' attrito

$$\rho_x = \frac{\partial x}{\partial u}\mu_1 + \frac{\partial x}{\partial v}\mu_2, \quad \rho_y = \frac{\partial y}{\partial u}\mu_1 + \frac{\partial y}{\partial v}\mu_2, \quad \rho_z = \frac{\partial z}{\partial u}\mu_1 + \frac{\partial z}{\partial v}\mu_2 .$$

Il loro lavoro virtuale è

$$\begin{aligned} \delta L &= \rho_x \delta x + \rho_y \delta y + \rho_z \delta z \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\mu_1 + \frac{\partial x}{\partial v}\mu_2\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right) + \ldots \\ &= (E\mu_1 + F\mu_2)\,\delta u + (F\mu_1 + G\mu_2)\,\delta v , \end{aligned}$$

essendo

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

il quadrato dell' elemento lineare della superficie nelle coordinate curvilinee $u\,v$. Pertanto le forze d' attrito relative a queste coordinate sono

$$\rho_u = E\,\mu_1 + F\,\mu_2\,,\quad \rho_v = F\,\mu_1 + G\,\mu_2\,. \tag{10}$$

Il sistema libero dedotto dal precedente coll' eliminazione del vincolo è quello in cui le coordinate sono u e v, e la forza viva è

$$\frac{1}{2}\,(E\,u'^2 + 2\,F\,u'\,v' + G\,v'^2)\,,$$

che è la T precedente ove si ponga

$$x = x\,(u, v)\,,\quad y = y\,(u, v)\,,\quad z = z\,(u, v)\,;$$

si vede subito che l' applicazione della (3) conduce, per le forze d' attrito, alle stesse ρ_u e ρ_v trovate ora. Ciò è conforme a quanto si disse in generale nel n. precedente.

Nell' esempio attuale è facile riconoscere la relazione geometrica che passa fra le ρ e le μ. Le $\rho_x\,\rho_y\,\rho_z$ rappresentano le proiezioni, sugli assi cartesiani, della forza d' attrito applicata al punto mobile; indicandone con $\sigma_u\,\sigma_v\,\sigma_w$ le proiezioni ortogonali sulle tangenti alle linee $u\,v$ e sulla normale w alla superficie, si trova:

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{E}}\,(E\,\mu_1 + F\,\mu_2)\,,\quad \sigma_v = \frac{1}{\sqrt{G}}\,(F\,\mu_1 + G\,\mu_2)\,,\quad \sigma_w = 0. \tag{11}$$

La $\sigma_w = 0$ dice che la forza d' attrito è tangente alla superficie; dalle due prime poi, confrontate colle (10), si ricava

$$\sigma_u = \frac{\rho_u}{\sqrt{E}}\,,\qquad \sigma_v = \frac{\rho_v}{\sqrt{G}}\,, \tag{12}$$

e queste dicono che ρ_u e ρ_v differiscono solo pei fattori $\sqrt{E}$ e $\sqrt{G}$ risp. dalle proiezioni ortogonali della forza d' attrito sulle tangenti alle linee coordinate. Calcoliamo ora le componenti obblique della medesima forza nelle medesime direzioni. Chia-

mando $\overline{\sigma_u}$ e $\overline{\sigma_v}$ queste componenti, e θ l'angolo ($< \pi$) delle linee $u\,v$, abbiamo, fra le componenti obblique e quelle ortogonali, le relazioni

$$\overline{\sigma_u} = \frac{\sigma_u - \sigma_v \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,, \qquad \overline{\sigma_v} = \frac{\sigma_v - \sigma_u \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,.$$

Si ha, come è noto,

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}\,;$$

di qui e dalle (11) otteniamo:

$$(12') \qquad \overline{\sigma_u} = \mu_1 \sqrt{E}\,, \quad \overline{\sigma_v} = \mu_2 \sqrt{G}\,.$$

La relazione cercata fra le $\rho_u\,\rho_v$ e le $\mu_1\,\mu_2$ è contenuta nelle due coppie di formole (12) e (12'). Mentre, cioè, ρ_u e ρ_v, *divise* risp. per $\sqrt{E}$ e $\sqrt{G}$, danno le proiezioni *ortogonali* della forza d'attrito sulle direzioni coordinate, μ_1 e μ_2, *moltiplicate* per le stesse funzioni, ne danno le proiezioni *obblique* su quelle direzioni medesime.

4. Analogo all'esempio precedente è quello del movimento d'una sfera in contatto con un piano. Supposto che il piano sia fisso, assumiamolo come piano $x\,y$; ammettiamo poi che la sfera sia omogenea, e diciamone M la massa, A il momento d'inerzia rispetto a un diametro qualunque, r il raggio. Le forze d'attrito si trovano calcolate nella mia Nota « L'attrito nel movimento di un solido in contatto con un piano » al n. 8 [1]). Le coordinate ivi scelte per fissare la posizione della sfera nello spazio sono i tre angoli d'Eulero $\psi\,\varphi\,\theta$ relativi ad una terna d'assi $\xi\,\eta\,\zeta$ fissi nella sfera e coll'origine nel suo centro, e le coordinate $\alpha\,\beta\,\gamma$ di quest'ultimo rispetto agli assi $x\,y\,z$ fissi nello spazio. Nell'ipotesi che alla sfera non s'imponga altro legame all'infuori del contatto col piano $x\,y$, le equazioni dei vincoli si riducono ad una sola, $\gamma = r$, e le sei

1) Nuovo Cimento, 1905, Marzo.

forze d'attrito si esprimono in funzione di cinque parametri μ colle formole

$$\rho_\psi = A(\mu_1 + \mu_2 \cos\theta), \quad \rho_\varphi = A(\mu_1 \cos\theta + \mu_2), \quad \rho_\theta = A\mu_3,$$
$$\rho_\alpha = M\mu_4, \quad \rho_\beta = M\mu_5, \quad \rho_\gamma = 0.$$

Dal sistema vincolato a sei coordinate si passa immediatamente ad un sistema libero con una coordinata di meno, assumendo a coordinate indipendenti $\psi\,\varphi\,\theta\,\alpha\,\beta$. Per la forma speciale che ha il vincolo nel nostro caso, $\gamma = \text{cost.}$, le espressioni del lavoro virtuale e della forza viva del sistema libero si deducono da quelle del primo sopprimendo i termini contenenti risp. $\delta\gamma$ e γ'; con ciò le forze d'attrito nel sistema libero risultano le stesse $\rho_\psi\,\rho_\varphi\,\rho_\theta\,\rho_\alpha\,\rho_\beta$ quali sono date dalle formole che precedono.

Come nel primo esempio, possiamo vedere anche qui l'esatta equivalenza geometrica fra le ρ e le μ. Intanto μ_4 e μ_5 sono proporzionali a ρ_α e ρ_β, che sono le proiezioni, sugli assi x e y, dell'attrito di strisciamento, ed il fattore di proporzionalità è una costante; così pure μ_3 differisce solo per un fattore costante da ρ_θ, che è la proiezione ortogonale, sulla linea dei nodi N, dell'asse momento della coppia d'attrito. Dalle formole che danno ρ_ψ e ρ_φ ricaviamo poi:

$$A\mu_1 = \frac{\rho_\psi - \rho_\varphi \cos\theta}{\text{sen}^2\theta}, \qquad A\mu_2 = \frac{\rho_\varphi - \rho_\psi \cos\theta}{\text{sen}^2\theta};$$

ora ρ_ψ e ρ_φ sono le proiezioni ortogonali dell'asse momento della coppia d'attrito sull'asse z e sull'asse ζ [1]), mentre θ indica l'angolo compreso fra questi due assi: quindi i secondi membri delle ultime due formole rappresentano le proiezioni oblique, fatte parallelamente ai piani ζN e zN, del medesimo asse momento sulle medesime direzioni z e ζ. Mentre adunque, riferendo quell'asse momento alla terna $z\zeta$N, le $\rho_\psi\,\rho_\varphi\,\rho_\theta$ ci danno le sue proiezioni *ortogonali* sui tre assi, invece $\mu_1\,\mu_2\,\mu_3$ ce ne danno (a meno del fattore costante A) le proiezioni *oblique*.

1) Per il significato geometrico di $\rho_\psi\,\rho_\varphi\,\rho_\theta$ cfr. ad es. Klein-Sommerfeld: Th. des Kreisels, p. 109.

5. Le relazioni fra le ρ e le μ sono contenute nelle formole (3), oppure nelle equivalenti (3'). Queste relazioni si possono mettere sotto un' altra forma, che permette di dare un aspetto caratteristico alle equazioni del movimento d' un sistema libero. Introduciamo due funzioni P e M col porre

$$\mathsf{P} = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_j \mathrm{E}_{ij} \mu_i \mu_j \,, \qquad \mathsf{M} = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_j e_{ij} \rho_i \rho_j \,:$$

P e M sono due forme quadratiche reciproche l' una dell' altra, che si ottengono dalla parte T_2 della forza viva e dalla sua forma reciproca sostituendo le μ alle coordinate della velocità e le ρ ai termini $\frac{\partial T_2}{\partial x'_i}$ nelle coordinate dell' impulso. Facendo uso delle funzioni P e M le (3) e (3') si scrivono

$$(13) \qquad \rho_i = \frac{\partial \mathsf{P}}{\partial \mu_i} \,, \qquad\qquad (13') \qquad \mu_j = \frac{\partial \mathsf{M}}{\partial \rho_j} \,;$$

le equazioni di Lagrange

$$(14) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = U_i + \rho_i$$

diventano allora, se supponiamo inoltre che esista la funzione potenziale U delle forze applicate U_i:

$$(14') \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathsf{P}}{\partial \mu_i} \,.$$

Se poi si introduce la funzione S di Appell [1])

$$S = \frac{1}{2}\int_\tau k\,(\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2)\, d\tau \,;$$

dove $\xi\,\eta\,\zeta$ sono coordinate cartesiane di punto, τ è lo spazio occupato dai punti $\xi\,\eta\,\zeta$ e k la densità, si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial S}{\partial x''_i} \,,$$

1 Les mouvements de roulement en dynamique, p. 45, (Scientia, 4°).

per cui le (14') diventano

$$\frac{\partial S}{\partial x''_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial \mu_i} . \tag{14''}$$

Le singole equazioni del movimento contengono dunque tre termini, che si formano prendendo le derivate di tre funzioni diverse rispetto a tre diverse serie di variabili; due poi di queste funzioni, cioè S e P, dipendono, oltre che dalle variabili rispetto a cui si derivano, anche dalle x e dalle x'.

In luogo della P si può far comparire la funzione M: basta moltiplicare la (14) per e_{ij} e sommare per tutti i valori di i; con ciò si ha:

$$\Sigma_i\, e_{ij} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} - U_i \right) = \Sigma_i\, e_{ij}\, \rho_i = \mu_j = \frac{\partial M}{\partial \rho_j} .$$

Si noti che questa operazione, mediante la quale si risolvono le (14) rispetto alle μ, conduce pure alla loro risoluzione rispetto alle x''. Difatti abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i} = \Sigma_r\, E_{ri}\, x''_r + \Sigma_r\, \Sigma_s \frac{\partial E_{si}}{\partial x_r} x'_r\, x'_s + P_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \Sigma_r\, \Sigma_s \frac{\partial E_{rs}}{\partial x_i} x'_r\, x'_s + Q_i ,$$

ove P_i e Q_i sono polinomi di 1° grado nelle x'; ne segue

$$\Sigma_i\, e_{ij} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = x''_j + \Sigma_r\, \Sigma_s\, A^{(j)}_{rs}\, x'_r\, x'_s + \Xi_j ,$$

essendo

$$A^{(j)}_{rs} = \Sigma_i\, e_{ij} \left(\frac{\partial E_{is}}{\partial x_r} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_{rs}}{\partial x_i} \right)$$

e Ξ_j avendo lo stesso significato di P_i e Q_i. Alle equazioni del movimento si può quindi dare la seguente forma, che mette anche meglio in luce l'analogia formale fra i termini $\frac{\partial S}{\partial x''_i}$ e $\frac{\partial P}{\partial \mu_i}$ della (14''):

$$x''_j + 2 \sum_{r,s} \left\{ \begin{matrix} r\ s \\ j \end{matrix} \right\} x'_r\, x'_s + \Xi_j = \Sigma_i\, e_{ij}\, U_i + \mu_j \tag{15}$$

$$= \Sigma_i\, e_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial M}{\partial \rho_j} ;$$

con $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ j \end{matrix} \right\}$ si sono indicati i simboli di Christoffel di 2ª specie calcolati rispetto alla forma T_2, e la somma del primo membro è estesa a tutte le combinazioni binarie dei valori $1 \ldots n$ degli indici; il polinomio Ξ_j manca poi ogni volta che la forza viva T si riduce alla forma T_2, cioè il sistema libero (x) si può far provenire da un sistema olonomo (X) i cui vincoli non dipendono dal tempo.

6. Accenneremo ancora alla forma che prendono le forze d'attrito quando a componenti della velocità si scelgano non già le x', ma n caratteristiche $p_1 \ldots p_n$ di specie qualunque. Se

$$x'_i = y_i + \Sigma_r\, x_{ir}\, p_r \tag{16}$$

sono le relazioni che passano fra le derivate delle coordinate e le caratteristiche p (dove le y_i e le x_{ir} sono funzioni delle x e di t), avremo un sistema di spostamenti virtuali al tempo t prendendo

$$\delta x_i = \Sigma_r\, x_{ir}\, \delta\,\omega_r\,, \tag{16'}$$

indicando $\delta\,\omega_1 \ldots \delta\,\omega_n$ delle quantità infinitesime indipendenti. La parte omogenea di 2° grado della forza viva del sistema, espressa colle x', sia

$$T_2 = \frac{1}{2}\, \Sigma_i\, \Sigma_j\, E_{ij}\, x'_i\, x'_j\;;$$

allora la forza d'attrito relativa alla coordinata x_i è data dalla (3), ed esprimendo, mediante le (16'), il lavoro virtuale delle ρ_i in funzione delle $\delta\,\omega$,

$$\Sigma\, \rho_i\, \delta\, x_i = \Sigma_h\, \delta\,\omega_h\, \Sigma_i\, \Sigma_j\, E_{ij}\, x_{ih}\, \mu_j\;,$$

troviamo che le forze d'attrito $\overline{\rho}$ relative alle caratteristiche p sono date da

$$\overline{\rho_h} = \Sigma_i\, \Sigma_j\, E_{ij}\, x_{ih}\, \mu_j\;. \tag{17}$$

Questa formola non va confusa colla (2) che contiene l'espressione generale delle forze d'attrito, come si vede os-

servando la diversa distribuzione degli indici nelle due formole.

In $\overline{\rho_h}$ si può introdurre, in luogo dei coefficienti E_{ij} di T_2, quelli della forza viva calcolata in funzione delle caratteristiche p. Chiamando, in quest' ultima, $\overline{T_2}$ l' analogo di T_2, abbiamo

$$\overline{T_2} = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \overline{E_{rs}} \, p_r \, p_s \, , \qquad \overline{E_{rs}} = \Sigma_i \Sigma_j \, E_{ij} \, x_{ir} \, x_{js} \, .$$

D' altra parte si ricava dalle (16):

$$p_r = \Sigma_i \, X_{ir} \, (x'_i - y_i) \, ,$$

essendo X_{ir} il complemento algebrico di x_{ir} nel determinante di questi coefficienti, diviso pel determinante stesso; sostituendo in $\overline{T_2}$, coll' osservare che la parte omogenea di 2° grado nelle x' che ne risulta deve coincidere con T_2, si deduce:

$$E_{ij} = \Sigma_r \Sigma_s \overline{E_{rs}} \, X_{ir} \, X_{js} \, .$$

La forza d' attrito $\overline{\rho_h}$ diventa allora

(17') $$\overline{\rho_h} = \Sigma_j \Sigma_s \overline{E_{hj}} \, X_{sj} \, \mu_s \, ,$$

e se, accanto a questa, scriviamo la

(18) $$\overline{\rho_h} = \Sigma_i \, x_{ih} \, \rho_i$$

che segue dalla (17) confrontata colla (3), si ha nelle formole (3), (17) [oppure (17')], (18) il sistema completo di relazioni che intercedono fra le forze d' attrito ρ relative alle coordinate x, le μ relative al sistema speciale di caratteristiche definito dalle (4), e le $\overline{\rho}$ relative ad un sistema di caratteristiche qualunque.

In corrispondenza ai tre sistemi di forze d' attrito abbiamo tre diverse forme per le equazioni del movimento: le (14) e (15) mettono in evidenza risp. le ρ e le μ, mentre le forze $\overline{\rho}$ son messe in vista nelle equazioni del Prof. Maggi [1])

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{T}}{\partial p_s} = \Sigma_i \frac{dx_{is}}{dt} \frac{\partial T}{\partial x'_i} + \Sigma_i \, x_{is} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} + U_i \right) + \overline{\rho_s} \, ,$$

1) Di alcune nuove forme delle equazioni della dinamica, applicabili ai sistemi anolonomi; Rend. Lincei, 1901.

dove T e $\overline{\mathrm{T}}$ indicano la forza viva espressa mediante le x' o risp. mediante le p. Qualora nelle (16) manchino i termini y_i, ed i coefficienti x_{ir} non contengano esplicitamente il tempo (vale a dire, nel sistema vincolato da cui si può imaginare dedotto (x) i legami non dipendano dal tempo), si hanno come equazioni del moto quelle del Prof. Volterra, delle quali le precedenti del Maggi sono un' estensione:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s} = \Sigma_r \Sigma_k a_{sk}^{(r)} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r} p_k + \Sigma_i x_{is}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i} + \mathrm{U}_i\right) + \overline{\rho_s} \quad ^{1}).$$

Qui T s' intende espressa dappertutto in funzione delle p, e si pone

$$a_{sk}^{(r)} = \Sigma_g e_{gr} (b_{sk}^{(g)} - b_{ks}^{(g)}), \qquad b_{sk}^{(g)} = \Sigma_h x_{hk} \Sigma_i \Sigma_j \mathrm{E}_{ij} \frac{\partial x_{is}}{\partial x_h} x_{jg}.$$

7. Da quanto s' è visto risulta che, limitandoci a discorrere in astratto di forze d' attrito, non vi ha alcuna differenza fra il caso di un sistema vincolato e quello di un sistema libero. La cosa va diversamente quando ci proponiamo di trovare per le forze d' attrito le espressioni definitive da introdursi nelle equazioni del movimento, in modo che queste diventino atte a determinarlo. Ricordiamo come si ottengono quelle espressioni in un sistema soggetto a legami. Accanto alle forze d' attrito vi sono le forze vincolari, le prime forme lineari dei parametri μ, le seconde dei parametri λ di Lagrange; fra le prime e le seconde intercedono delle relazioni, le quali traducono analiticamente le leggi sperimentali che regolano le azioni d' attrito nel sistema considerato. Risultano così delle equazioni fra le μ e le λ (nonchè le coordinate, le componenti della velocità e il tempo) sulla cui natura nulla si può dire in generale, ma che, in tutti i casi particolari studiati, sono in numero eguale alle μ e risolubili rispetto a

1) Sopra una classe di equazioni dinamiche, § 3; Atti Acc. Sc. Torino, 1898. Le equazioni stabilite dal Prof. Volterra corrispondono all' ipotesi che le x_i siano coordinate cartesiane; esse però conservano la stessa forma anche quando le x_i indicano coordinate qualunque, salvo che i coefficienti $a_{sk}^{(r)}$ hanno un' espressione alquanto più complicata.

queste. Supposto d'aver effettuata la risoluzione e di aver sostituito le μ nelle forze d'attrito, queste diventano funzioni delle λ, delle coordinate, delle componenti della velocità e del tempo; si eliminano, così, mediante le leggi sperimentali dell'attrito, i parametri μ, e quindi le funzioni incognite del problema tornano ad essere tante quante sono le equazioni da cui dipendono.

L'eliminazione completa delle μ non riesce più in un sistema libero, ove non si ha più traccia di forze vincolari, se non risalendo al sistema vincolato dal quale il primo fu dedotto coll'eliminazione dei vincoli. Per chiarire la cosa riferiamoci ai due esempi dei n.[i] 3 e 4.

Nel moto di un punto sopra una superficie l'esperienza dice che l'attrito si manifesta con una forza direttamente opposta alla velocità istantanea del punto e proporzionale, in grandezza, alla pressione del punto contro la superficie. Le due equazioni che esprimono analiticamente questa legge conterranno dunque, oltre alle due μ onde si compongono le forze d'attrito, anche la pressione λ esercitata dal punto; ricavando le μ in funzione di λ e sostituendo nelle forze d'attrito, si introdurrà, accanto alle coordinate del sistema, la nuova incognita λ. Se ora il punto mobile si considera rappresentato dalle sue coordinate cartesiane legate dall'equazione della superficie (equazione del vincolo), abbiamo, per la determinazione delle tre coordinate e di λ, quattro equazioni; invece nel sistema libero, che corrisponde a rappresentare il punto colle sue coordinate curvilinee $u\ v$, abbiamo due sole equazioni per il calcolo di u, v e λ, per cui non basterà la considerazione pura e semplice del sistema libero per determinarle.

Analogamente, nel moto di una sfera in contatto con un piano le leggi sperimentali dell'attrito danno luogo a cinque equazioni nelle μ e nella pressione totale della sfera in contatto col piano: questa pressione viene introdotta nelle equazioni del moto coll'eliminarne le μ, e figurerà come una nuova incognita del problema oltre alle coordinate. Nel sistema vincolato in cui la sfera è rappresentata dalle sei coordinate $\alpha\,\beta\,\gamma\,\psi\,\varphi\,\theta$ abbiamo, per il calcolo di queste e della pres-

sione, sette equazioni, mentre ne abbiamo solo cinque nel sistema libero nel quale insieme colla pressione si hanno da calcolare le cinque coordinate $\alpha \beta \psi \varphi \theta$.

In generale possiamo dire che le leggi sperimentali dell'attrito, essendo le stesse per il sistema vincolato (X) e per il sistema libero (x), introducono, nelle forze d'attrito del secondo, degli elementi incogniti che si compongono mediante le forze vincolari del primo, e che le equazioni del moto di (x), eguali in numero alle coordinate, non bastano a determinare. Per giungere a questo occorre risalire al sistema (X). Noi sappiamo [1]) che le corrispondenti equazioni differenziali, insieme colle equazioni dei vincoli, permettono di calcolare le forze vincolari, ossia le λ, in funzione esclusivamente delle coordinate X, delle velocità X' e del tempo, senza che intervengano affatto le forze d'attrito. Sostituendo alle X e X' le loro espressioni in funzione delle x e x', le $\lambda\,(x, x', t)$ si potranno allora introdurre nelle forze d'attrito del sistema (x), nel quale, così, figureranno come uniche incognite le coordinate x.

Il procedimento col quale si sono eliminate, dalle equazioni differenziali di (x), le azioni vincolari non contiene alcun circolo vizioso, come si potrebbe pensare osservando che, ridotto una prima volta il sistema (X) al sistema (x) si ritorna al primo per eliminare nel secondo le λ. Confrontando difatti (X) con (x) dopo che se ne sono eliminate, coi calcoli accennati, le λ, si trova che le equazioni del primo sistema sono in numero di $N + m$, se N è il numero delle coordinate X e m quello delle equazioni dei vincoli, mentre nel secondo le equazioni si riducono a $N - m$ fra le coordinate x. Siccome poi (X) e (x) non sono altro, in fondo, che due diverse rappresentazioni di uno stesso sistema materiale, così quei calcoli, che non importano nessuna integrazione, raggiungono l'effetto di semplificare il sistema di equazioni differenziali da cui dipende il suo moto.

---

1) V. la mia Nota "Sulla teoria mecc. dell'attrito" n. 4.

UNA DISPOSIZIONE PER MISURARE LA GROSSEZZA DI UNA LAMINA,

del Dott. S. MARESCA.

1. Lavorando sulla elasticità dei cristalli, mi occorse di misurare le grossezze, comprese fra 0 e 1,5 mm. circa, di asticelle prismatiche tagliate da sostanze cristalline. Facendo uso, come si suole in tali casi, dello sferometro, constatai a mia volta i noti inconvenienti cui esso dà luogo. Tali inconvenienti dipendono:

Dal fatto che le facce dell' asticella, in generale, non combaciano esattamente col piano dello sferometro.

Dall' impossibilità di far sì che la punta della vite micrometrica tocchi l' asticella senza affondarvi.

Dall' impossibilità di fare le misure sempre nelle stesse condizioni.

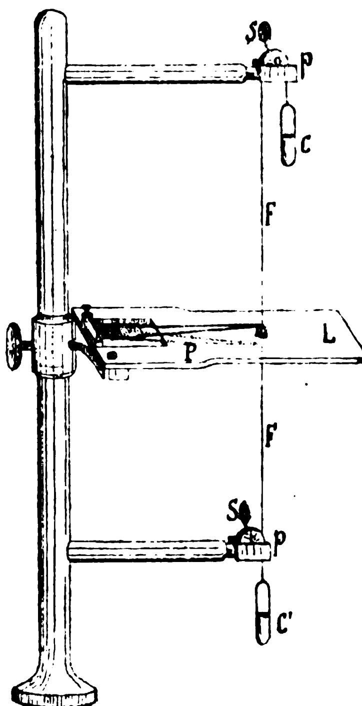
Al primo di tali inconvenienti si cerca di riparare adagiando una volta una faccia dell' asticella sul piano, ed un'altra, adagiandovi quella opposta. Al secondo ed al terzo, ricorrendo a diversi espedienti che hanno per iscopo di cogliere il primo contatto della punta della vite micrometrica con l'asticella.

Malgrado ciò, l' esattezza delle misure resta sempre subordinata all' adagiamento più o meno buono dell' asticella sul piano ed alla maggiore o minore destrezza dello sperimentatore.

Queste considerazioni mi hanno condotto a ideare una disposizione sperimentale da sostituire con vantaggio, allo sferometro, e poichè nelle mie esperienze questa mi ha dato buoni risultati e può trovare applicazioni più generali, credo utile di farne oggetto di una breve nota.

2. La parte principale della disposizione è l' apparecchio rappresentato dalla figura. In esso, due sferette sono saldate

nelle estremità dei bracci di una pinzetta P costruita con molle e fili metallici. A ciascuna sferetta è fissato un capo di un filo metallico sottilissimo F che passa nella gola di una puleggia p e sorregge un peso attaccato all'altra estremità. Ogni



puleggia riposa col taglio del coltello che ne individua l'asse su di un pezzo metallico foggiato a forchetta e porta uno specchio S.

Fra i due bracci della pinzetta, è situata una lamina metallica L che serve a sostenere le asticelle che si vogliono misurare; in essa è praticato un foro che permette alle due sfere di toccarsi.

Completa la disposizione una coppia di cannocchiali e scale per la lettura delle rotazioni degli specchi uniti alle puleggie.

Per misurare la grossezza di un'asticella, si adagia questa sulla lamina L, insinuandola tra le sferette precedente-

mente in contatto, e si determinano gli spostamenti delle sfere deducendoli dalle rotazioni degli specchi [1]).

3. La somma dei due spostamenti darà senz' altro la grossezza nel punto esplorato, a condizione che i centri delle sferette ed i fili che da queste vanno alle puleggie, si spostino lungo una stessa normale alla faccia superiore della lamina che sorregge l' asticella.

Per fare sì che tali condizioni sieno verificate, si può procedere nel modo seguente:

Si costruisce la pinzetta con bracci lunghi e con molle larghe e sottili, così che le sferette saldate nelle sue punte si spostino sensibilmente in linea retta obbedendo alle sole flessioni delle molle. Si fissa al suo sostegno e si dispongono le cose in modo che gli spostamenti delle sfere avvengano verticalmente [2]). Poi si fanno passare i fili nelle gole delle puleggie facendo far loro per lo meno un giro completo per evitare scorrimento, e si dispongono le puleggie sulle forchette in modo che i fili restino verticali. Da ultimo, si mette a posto la lamina metallica L orizzontalmente e si sospendono ai fili dei pesi tali che il contatto fra le due sfere avvenga un poco al disopra della lamina.

Procedendo così, si è sicuri che i centri delle sferette si spostano normalmente alla faccia superiore della lamina; si potrà essere anche sicuri ch' essi si spostano lungo la stessa normale se guardando in diverse direzioni ed in modo da sfiorare la faccia superiore della lamina, non si osservano come penetrazioni nel contatto delle due sfere.

Per impedire sollevamenti dalla lamina, delle asticelle che si misurano, tornando assai comodo di tenervela adagiata senza fissarla, basta mettere sulla lamina un arresto per il braccio superiore della pinzetta e sospendere al filo della sferetta in-

1) Per fare le letture con un solo cannocchiale basterebbe leggere le rotazioni di uno dei due specchi per mezzo di un terzo specchio fisso collocato in vicinanza dell'altro, ciò che io non ho potuto fare perchè avrei avuto bisogno di un cannocchiale a campo grande ed a forte ingrandimento, che questo gabinetto non possiede.

2) Per assicurarmi che ciò accadeva quando preparavo l' apparecchio da me adoperato, ho attaccato dei reticoli obbiettivi alle sferette e li ho osservati, quando queste si spostano, con un microscopio di cui un filo del reticolo oculare era stato disposto verticalmente osservando un filo a piombo fatto con filo di ragno.

feriore tanti pesi quanti sono necessari perchè l' aggiunta ulteriore di un peso piccolissimo basti ad allontanarla dall'altra.

In tal modo si può essere sicuri che un oggetto situato fra le sfere non può sollevarsi dalla lamina e vien premuto con una pressione che si può rendere assai piccola [1]).

Nell' apparecchio da me adoperato la pinzetta ha i bracci lunghi mm. 80 e formati con molle di acciaio grosse mm. 0,1 e larghe mm. 10 e con fili di ottone del diametro di 1 mm. circa. Le due sfere sono di acciaio e del diametro di circa mm. 3; e poichè si toccano per una superficie di circa mm^2 0,04 (misurata con microscopio munito di micrometro) e si possono allontanare per circa 2 mm. aggiungendo un peso di gr. 0,01 nel cestello inferiore ed uno di 1 gr. circa in quello superiore, possono esercitare in tali condizioni una pressione di soli gr. 25 per mm^2; pressione che nei casi ordinari non può portare alcuno inconveniente.

4. Verificate le condizioni anzidette, si può graduare la disposizione procedendo p. es. nel modo che segue: Si introduce fra le due sferette una lamina di grossezza G conosciuta e si misurano gli angoli A e B di cui ruotano rispettivamente le puleggie superiore ed inferiore; sarà allora:

$$G = KA + K'B$$

indicando con K e K' gli spostamenti delle sferette superiore ed inferiore per le rotazioni dell' unità di angolo di ciascuna puleggia. Si misurano poi gli angoli A' e B' di cui le stesse puleggie ruotano quando le due sferette subiscono spostamenti uguali, e si avrà:

$$\frac{A'}{B'} = \frac{K'}{K} .$$

Equazione che, insieme alla precedente, permette la determinazione delle costanti K e K'.

Per la mia disposizione, misurando gli angoli di rotazione in divisioni delle scale di lettura per averle fatte in arco di

1) Torna comodo sospendere ai fili dei cestelli C, C' (V. fig.) perchè basterà far cadere in essi, p. es. dei pallini di piombo per raggiungere lo scopo cui si è accennato sopra.

circolo e disposte in modo che il centro di questo cade sugli assi di rotazione delle puleggie, ho trovato:
per $G =$ mm. 0,8469

$A = 590,1$ divis. della scala oss. allo specchio sup.
$B = 25,2$ » » inf.;

e

$$\frac{K}{K'} = 1,009 .$$

Risulta quindi

$$K = 0,001377 \qquad K' = 0,001364.$$

5. Tale metodo di graduazione elimina qualsiasi errore proveniente dal non essere verificate rigorosamente le condizioni di cui al n. 3.

Non sono possibili inoltre errori apprezzabili dovuti a torsioni delle molle, a sollevamenti delle asticelle dalla lamina, ad affondamenti delle sfere nelle asticelle che si misurano; nè altri dovuti a mutazioni nella lunghezza dei fili e nel diametro delle puleggie per variazioni di temperatura, perchè la durata di ciascuna osservazione è breve e perchè quando si osservano forti variazioni di temperatura si ripete la determinazione delle costanti dell'apparecchio [1]).

E siccome, d'altra parte, restano eliminati gli errori dovuti ad attrito dei coltelli sulle forchette per effetto delle piccole scosse che si danno alle sfere quando fra esse si caccia o si fa scorrere l'oggetto che si misura; e non variano i raggi delle puleggie col variare delle posizioni delle puleggie stesse [2]), così gli errori che si possono commettere adoperando la disposizione descritta si riducono a quelli di osservazione nelle letture: mm. 0,0002 circa.

6. I due esempi che seguono bastano per mostrare quale attendibilità possono avere le misure fatte con la nuova disposizione e quali vantaggi questa presenta sullo sferometro.

1) Una variazione di 10° nella temperatura, porterebbe un errore di mm. 0,0004 nella misura di una grossezza di mm. 1,5, giacchè le puleggie, di ottone, hanno un raggio di circa mm. 4.

2) Questo si può verificare osservando se gli angoli di cui ruotano le due puleggie quando si danno spostamenti diversi alle due sfere mentre si tengono sempre in contatto, stanno fra loro in rapporto costante.

Confronto fra le misure fatte con lo sferometro e con la disposizione descritta, su di una lastra di vetro [1].

Con lo sferometro

Adagiando sul piano una faccia (*a*) della lastra

Punto esplorato	I Serie – Grossezza della lastra in millesimi di mm.			II Serie – Grossezza della lastra in millesimi di mm.			Media
1	764	765	765	762	763	761	763
2	764	766	764	763	765	763	764
3	763	761	760	764	761	764	762
4	766	765	765	765	767	766	766
5	764	763	763	765	765	764	764
6	766	765	762	763	765	763	764
7	766	766	765	762	764	764	765
8	768	770	769	767	768	768	768
9	771	772	769	769	768	768	770
10	773	774	773	776	774	772	774

Adagiando sul piano la faccia opposta (*b*)

Punto esplorato	III Serie			IV Serie			Media
1	758	760	758	760	760	759	759
2	761	760	761	762	759	759	760
3	763	762	763	763	763	763	763
4	758	760	759	761	762	759	760
5	761	762	762	761	763	763	762
6	759	761	760	760	757	761	760
7	760	761	760	760	760	751	760
8	763	762	762	763	762	762	762
9	768	767	768	767	767	767	767
10	777	777	774	772	772	772	774

Con la disposizione

Adagiando sulla lamina la faccia (*a*) della lastra

Punto esplorato	I Serie – Spostamento della sfera superiore in divis. delle scale	I Serie – Spostamento della sfera inferiore in divis. delle scale	I Serie – Grossezza della lastra in millesimi di mm.	II Serie – Spostamento della sfera superiore in divis. delle scale	II Serie – Spostamento della sfera inferiore in divis. delle scale	II Serie – Grossezza della lastra in millesimi di mm.
1	528.6	24.7	761.5	527.2	26.3	761.7
2	528.8	24.1	761.0	527.1	26.1	761.4
3	529.1	23.8	761.0	527.2	25.9	761.1
4	529.7	23.1	760.7	528.2	24.8	761.1
5	530.7	23.0	761.9	529.8	24.2	762.3
6	531.9	22.8	763.5	530.7	24.0	763.3
7	532.9	23.4	765.5	532.2	24.3	765.9
8	534.1	24.1	768.3	533.0	25.8	768.9
9	536.0	24.9	772.1	535.0	26.0	772.0
10	538.9	25.2	776.4	537.3	26.8	776.4

Adagiando sulla lamina la faccia opposta (*b*)

Punto esplorato	III Serie – superiore	III Serie – inferiore	III Serie – Grossezza	IV Serie – superiore	IV Serie – inferiore	IV Serie – Grossezza
1	528.4	24.8	761.4	528.6	24.7	761.5
2	528.1	24.9	761.2	529.2	23.9	761.2
3	528.3	24.7	761.1	528.7	24.2	761.0
4	528.8	24.0	760.9	528.0	24.8	760.8
5	529.0	24.7	762.1	530.0	24.0	762.4
6	530.0	24.9	763.6	531.0	23.7	763.3
7	531.7	24.9	766.0	532.1	24.4	765.7
8	534.3	23.8	768,2	533.8	24.8	768.7
9	537.3	23.7	772.3	537.0	24.1	772.4
10	539.7	24.0	776.0	540.4	23.8	776.6

1) Le misure sono state prese lungo una stessa linea in punti che distano fra loro di mm. 2; i numeri segnati nelle prime colonne di ciascun prospetto, fissano a un dipresso la posizione di quei punti sulla linea.

Da questo primo confronto risulta: che con lo sferometro si possono avere differenze sino a circa mm. 0,01 facendo le misure in uno stesso punto; che si debbono fare molte misure per avere solo un' idea del modo con cui variano le grossezze nei vari punti; che il non perfetto adagiarsi della lastrina sul piano dell' istrumento tende a dare per la grossezza valori troppo grandi. Mentre con la disposizione descritta, facendo misure in uno stesso punto le differenze non superano il millesimo di mm.; si hanno risultati affatto indipendenti dal modo con cui la lastra appoggia sulla lamina ed anche una sola serie di misure è sufficiente per far conoscere come varia la grossezza nei vari punti; accontentandosi poi solo dell' approssimazione al millesimo di mm., una sola determinazione basta per avere la grossezza in un punto, ciò che apporta un risparmio di tempo assai considerevole quando occorre fare numerose determinazioni consimili.

Confronto fra le misure prese su una lastrina di allume di cromo, in diversi punti compresi in una superficie di circa 4 mm².

Con lo sferometro		Con la disposizione		
Grossezza in millesimi di mm.		Spostamento della sfera		Grossezza in millesimi
Adagiando una faccia	Adagiando quella opposta	superiore	inferiore	di mm.
		in divis. delle scale		
624	619	429.2	23.7	622.4
624	621	429.4	23.8	623.7
620	923	429.2	24.9	625.0
623	623	428.9	24.4	623.8
618	624	428.7	24.7	624.0
621	620	429.3	23.9	623.7
619	619	429.5	23.8	623.9
625	618	428.2	24.0	622.5
623	619	429.2	23.9	623.6
624	623	429.4	24.0	624.1
Grossezza media 621.5		Grossezza media 623.8		

Questo secondo confronto mette in rilievo che con lo sferometro, in certi casi, per l' affondarsi della punta della vite micrometrica nell' oggetto che si misura, si hanno per le grossezze, valori sensibilmente più piccoli; inconveniente che si

può ritenere completamente eliminato facendo le misure con la disposizione da me usata.

7. Riporto infine i risultati di alcune determinazioni fatte su una foglia d'alluminio e su di una foglia d'oro, per mostrare come con la nuova disposizione si possono determinare grossezze di lamine assai sottili anche in casi in cui lo sferometro non potrebbe essere adoperato.

Grossezza di una foglia.

Di alluminio			*D' oro*		
Spostamenti della sfera			Spostamenti della sfera		
superiore	inferiore	Grossezza in millesimi	superiore	inferiore	Grossezza in mill.
in divis. delle scale		di mm.	in divis. delle scale		di mm.
0.0	1.7	2.3	0.0	0.2	0.3
0.1	0.9	1.3	0.1	0.3	0.5
0.2	1.5	2.3	0.1	0.1	0.2
0.0	1.6	2.2	0.0	0.1	0.1
0.2	2.1	3.2	0.2	0.4	0.8
0.2	1.4	2.2	0.0	0.1	0.1
0.1	1.7	2.4	0.0	0.4	0.5
0.0	1.0	1.3	0.0	0.2	0.3
0.2	0.9	1.5	0.1	0.2	0.4
Grossezza media 2.1			Grossezza media 0.3		

Per queste misure un apposito congegno permetteva di allontanare le sferette; le foglie venivano distese in un anello fatto con filo metallico e poi introdotte fra le due sfere allontanate.

Le divergenze fra i risultati, non sono dovute a errori di misura bensì corrispondono a reali differenze di grossezza nei vari punti esplorati.

Ringrazio il Prof. Salvioni per i suggerimenti datimi e per aver lasciato a mia disposizione i mezzi di cui dispone questo gabinetto.

Messina, Marzo 1905.
Dal Gabinetto di Fisica della R. Università.

SULLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLE FORZE D'ATTRITO.

Nota di E. DANIELE.

1. In un lavoro precedente [1]) ebbi ad osservare che, se si hanno due sistemi meccanici ad attrito, di cui il secondo si deduca dal primo semplicemente coll' aumentarne i vincoli, si alterano, nel passaggio dal primo sistema al secondo, le espressioni delle forze vincolari e delle forze d' attrito, in quanto aumenta il numero dei parametri λ coi quali si compongono le forze vincolari, mentre diminuisce di altrettanto quello dei parametri μ coi quali si esprimono le forze d' attrito. Per cui si notava, e si verificava sopra un caso particolare, che le espressioni delle forze vincolari del primo sistema dovevano potersi dedurre da quelle del secondo ponendo le λ relative a quest' ultimo eguali a opportune combinazioni lineari delle λ relative a quello; per contro, eguagliando le μ del primo sistema a convenienti combinazioni lineari delle μ del secondo, le forze d' attrito di quello dovevano trasformarsi nelle analoghe forze di questo sistema.

Per ciò che riguarda la relazione fra le forze vincolari, la proprietà, anche nel caso generale, si riscontra immediatamente. Difatti se

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ri}\,\delta x_i = a_r\,\delta t \qquad (r = 1 \ldots m)$$

sono le equazioni dei vincoli del primo sistema, e

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\rho i}\,\delta x_i = \alpha_\rho\,\delta t \qquad (\rho = 1 \ldots m + m')$$

quelle del secondo, dall' ipotesi che quest' ultimo non sia altro che il primo coi vincoli aumentati segue che le (1) si possono

1) L' attrito nel movimento d' un solido in contatto con un piano, n. 12; N. Cimento, 1905 (Marzo).

considerare come m combinazioni lineari distinte delle (2); esistono cioè dei coefficienti $f_{\rho r}$ tali da aversi identicamente

$$\Sigma_i\, a_{ri}\, \delta x_i - a_r\, \delta t = \Sigma_\rho\, f_{\rho r}\, (\Sigma_i\, \alpha_{\rho i}\, \delta x_i - \alpha_\rho\, \delta t)\,,$$

da cui si deduce

(3) $$a_{ri} = \Sigma_\rho\, f_{\rho r}\, \alpha_{\rho i}\,.$$

Ora, se indichiamo con L i parametri del secondo sistema analoghi ai λ del primo, le forze vincolari del primo e del secondo sistema hanno risp. le espressioni [1])

$$\rho'_i = \Sigma_r\, a_{ri}\, \lambda_r\,, \qquad \tau'_i = \Sigma_\rho\, \alpha_{\rho i}\, L_\rho\,;$$

ed allora è evidente che si identificano le τ'_i colle ρ'_i prendendo

(A) $$L_\rho = \Sigma_r\, f_{\rho r}\, \lambda_r\,.$$

2. Quanto alla relazione già enunciata fra le forze d'attrito dei due sistemi, possiamo stabilirla nel modo seguente. Chiamando ρ_i e τ_i le forze d'attrito del primo e del secondo sistema, e M i parametri del secondo analoghi ai μ del primo, si ha [2])

$$\rho_i = \sum_{s=1}^{n-m} b'_{is}\, \mu_s\,, \qquad \tau_i = \sum_{\sigma=1}^{n-m-m'} \beta'_{i\sigma}\, M_\sigma\,,$$

dove b'_{is} e $\beta'_{i\sigma}$ hanno analoghi significati. Posto allora

(B) $$\mu_s = \Sigma_\sigma\, c_{s\sigma}\, M_\sigma\,,$$

vediamo se sia possibile determinare i coefficienti $c_{s\sigma}$ in modo che, sostituendo quella espressione di μ_s nelle ρ_i, queste si identifichino colle τ_i. Si dovranno perciò verificare, fra le b' e le β', le relazioni

(4) $$\Sigma_s\, b'_{is}\, c_{s\sigma} = \beta'_{i\sigma}\,:$$

si tratterà dunque di vedere se sia possibile ricavarne i coefficienti $c_{s\sigma}$.

1) V. la mia Nota "Sulla teoria meccanica dell'attrito, n. 2, N. Cim. 1904.
2) Id. id. Anche per le formole e notazioni usate nel seguito, è sempre a questa Nota che intendo di riferirmi.

Ora le (4) sono $n(n-m-m')$ equazioni lineari nelle c, che sono in numero di $(n-m)(n-m-m')$; e si possono raggruppare in $n-m-m'$ sistemi di n equazioni ciascuno, per modo che in un medesimo sistema l' indice σ abbia un valore fisso: in un tale sistema figurano $n-m$ coefficienti c. È però facile vedere che di queste n equazioni ve ne sono al più $n-m$ indipendenti. Difatti moltiplicando la (4) per a'_{ri} e sommando rispetto ad i si trova

$$\Sigma_s\, c_{s\sigma} \Sigma_i\, a'_{ri}\, b'_{is} = \Sigma_i\, a'_{ri}\, \beta'_{i\sigma}\,. \tag{5}$$

Per la (5') della Nota ora citata il coefficiente di $c_{s\sigma}$ è nullo identicamente; inoltre abbiamo, per la (8) di quella Nota e per la (3) di poco sopra:

$$a'_{ri} = \Sigma_\rho\, f_{\rho r}\, \Sigma_j\, e_{ij}\, \alpha_{\rho j}\,,$$

e quindi

$$\Sigma_i\, a'_{ri}\, \beta'_{i\sigma} = \Sigma_\rho\, f_{\rho r}\, \Sigma_i\, \Sigma_j\, e_{ij}\, \alpha_{\rho j}\, \beta'_{i\sigma}\,,$$

ed il coefficiente di $f_{\rho r}$ è sempre nullo. Ne segue che le (5) sono tante identità, cioè fra le n equazioni considerate ve ne sono almeno m conseguenza delle rimanenti. Mostriamo ora che le equazioni indipendenti del sistema sono appunto $n-m$. Basta moltiplicare la (5) per b_{ih} e sommare rispetto ad i; si trovano così le equazioni

$$\Sigma_s\, c_{s\sigma}\, \Sigma_i\, b_{ih}\, b'_{is} = \Sigma_i\, b_{ih}\, \beta'_{i\sigma}\,, \qquad (h = 1 \ldots n-m) \tag{5'}$$

nelle quali il determinante dei coefficienti non è nullo, perchè è dello stesso tipo di quelli delle (13) e (16) della solita Nota, determinanti che furono trovati essenzialmente diversi da zero. Le (5') sono dunque $n-m$ combinazioni lineari distinte delle n equazioni ottenute dalle (4) tenendo fisso l' indice σ, e poichè i termini noti nelle (5) non sono generalmente nulli, così queste equazioni determinano in modo unico le c.

Resta così provato che è sempre possibile esprimere le μ mediante forme lineari delle M in modo da trasformare le forze d' attrito del primo sistema in quelle del secondo; le formole di sostituzione (B) sono le analoghe delle (A) che per-

mettono di trasformare le forze vincolari del secondo sistema in quelle del primo.

3. I coefficienti $c_{s\sigma}$ si possono interpretare in un modo molto semplice, che fa apparire anche meglio l'analogia tra le (A) e le (B).

Mediante le equazioni

$$(1') \qquad \Sigma_i \, a_{ri} \, \delta x_i = 0 ,$$

che definiscono uno spostamento virtuale del primo sistema ad un istante fissato, si possono esprimere le δx_i come forme lineari di $n - m$ parametri indipendenti $\delta q_1 \, .. \, \delta q_{n-m}$:

$$(1'') \qquad \delta x_i = \Sigma_s \, b_{is} \, \delta q_s ,$$

ed i coefficienti b_{is} sono quelli stessi che compaiono nelle (5'). Così pure le equazioni

$$(2') \qquad \Sigma_i \, \alpha_{\rho i} \, \delta x_i = 0 ,$$

colle quali si definisce uno spostamento virtuale del secondo sistema a un dato istante, permettono di esprimere le δx_i come forme lineari di $n - m - m'$ parametri indipendenti $\delta \chi_1 \ldots \delta \chi_{n-m-m'}$:

$$(2'') \qquad \delta x_i = \Sigma_\sigma \, \beta_{i\sigma} \, \delta \chi_\sigma ,$$

ove i coefficienti $\beta_{i\sigma}$ sono gli analoghi dei b_{is}. Il passaggio dal primo al secondo sistema effettuandosi colla sola aggiunta di nuovi vincoli, vuol dire che le componenti δx_i di uno spostamento virtuale del secondo sistema ad un istante fissato debbono potersi ottenere da quelle del primo ponendo le δq eguali a forme lineari delle $\delta \chi$; vi sono cioè dei coefficienti $\varphi_{s\sigma}$ tali che facendo

$$\delta q_s = \Sigma_\sigma \, \varphi_{s\sigma} \, \delta \chi_\sigma ,$$

si identificano i secondi membri delle (1'') e (2''), e a definire quei coefficienti si hanno le equazioni

$$(6) \qquad \beta_{i\sigma} = \Sigma_s \, \varphi_{s\sigma} \, b_{is} .$$

Queste non sono tutte indipendenti, ma si riducono, con un calcolo analogo a quello fatto per le (4), alle seguenti:

$$\Sigma_s \phi_{s\sigma} \Sigma_i b_{is} b'_{ih} = \Sigma_i b'_{ih} \beta_{i\sigma} ,$$

le quali coincidono colle (5'); ne segue

$$c_{s\sigma} = \phi_{s\sigma} .$$

Questa eguaglianza ci dà il significato dei coefficienti c, che presenta stretta analogia con quello degli f nelle formole (3) (A): nel restringere, cioè, il grado di libertà del primo sistema per ottenere il secondo le f, da un lato, permettono il passaggio dalle equazioni dei vincoli del primo sistema alle equazioni del secondo; dall' altro lato le ϕ stabiliscono la dipendenza fra gli elementi caratteristici di uno spostamento virtuale di entrambi i sistemi ad un medesimo istante.

Accanto all' analogia conviene però notare una differenza sostanziale che intercede fra i coefficienti f e ϕ: i primi, oltre alle coordinate, contengono esplicitamente anche il tempo, che vi figura come una variabile indipendente; invece nelle ϕ si deve intendere fissato il valore del tempo, perchè così avviene dei coefficienti nelle (1') (2'), come pure delle funzioni b_{is} e $\beta_{i\sigma}$. Questa differenza non ha più ragione d' essere, naturalmente, quando i vincoli dei due sistemi non dipendono dal tempo.

4. Applichiamo, come esempio, le formole precedenti al caso in cui il primo sistema sia libero. Le forze d' attrito, calcolate secondo la formola (3) della mia Nota « *Forze d' attrito ed equazioni del movimento nei sistemi liberi* » [1]) sono

$$\rho_i = \Sigma_s E_{is} \mu_s ,$$

ed allora le equazioni (4), che definiscono i coefficienti $\phi_{s\sigma}$, si riducono a

$$\Sigma_s E_{is} \phi_{s\sigma} = \beta'_{i\sigma} = \Sigma_s E_{is} \beta_{s\sigma} .$$

Di qui si deduce

$$\phi_{s\sigma} = \beta_{s\sigma} ,$$

1) N. Cimento, Aprile (1905).

ciò che risulta anche dalla (6) osservando che nel nostro caso dobbiamo fare

$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = s) \\ 0 & (i \text{ diverso da } s) . \end{cases}$$

La nostra formola (B) diventa quindi

$$(B_1) \qquad \mu_s = \Sigma_\sigma \beta_{s\sigma} M_\sigma ,$$

e stabilisce, come risulta dal confronto colle (2'), fra le μ e le M le stesse relazioni che passano fra le componenti δx di uno spostamento virtuale del secondo sistema e gli elementi caratteristici $\delta\chi$. Come s'è visto al n. 1 della Nota ora citata, le μ si possono interpretare come forze d'attrito del primo sistema relative non più alle coordinate x, ma ad un sistema speciale di caratteristiche $p_1 \dots p_n$ legate alle x' dalle equazioni

$$x'_i = y_i (x_1 \dots x_n\ t) + \Sigma_h e_{ih} p_h .$$

Le caratteristiche p hanno dunque questa proprietà, che le forze d'attrito μ (del primo sistema) ad esse relative diventano forze d'attrito del secondo sistema, relative alle stesse velocità p (che ora non fungono più da caratteristiche, perchè legate da equazioni lineari), quando si esprimano le μ mediante i parametri M colle stesse formole con cui si esprimono le δx in funzione delle $\delta\chi$. La cosa si verifica subito scrivendo, in corrispondenza alla formola precedente, l'altra

$$\delta x_i = \Sigma_h e_{ih} \varepsilon_h ,$$

che esprime le componenti d'uno spostamento virtuale del primo sistema a un dato istante in funzione di n quantità infinitesime ε, ed osservando che, in virtù anche della (B_1), si ha identicamente

$$\Sigma \mu_s \varepsilon_s = \Sigma \tau_i \delta x_i .$$

5. Come secondo esempio supponiamo che i due sistemi dati abbiano lo stesso grado di libertà, e quindi coincidano in un medesimo sistema, i cui vincoli si rappresentino o colle (1) o colle (2). Questi due sistemi di equazioni sono allora alge-

bricamente equivalenti, e dovrà essere $m' = 0$, se ammettiamo che i vincoli si esprimano ogni volta con equazioni indipendenti fra di loro; quanto ai coefficienti b e β possiamo intenderli come due diverse soluzioni del sistema

$$\Sigma_i \, a_{ri} \, B_{is} = 0 \, ,$$

dove le B_{is} sono le incognite. Le (1") e (2") ci danno due diverse rappresentazioni parametriche delle δx_i in corrispondenza alle due soluzioni delle equazioni precedenti, mentre i $\phi_{s\sigma}$ sono i coefficienti della sostituzione lineare (in generale invertibile) che, eseguita sopra l'un sistema di parametri, riproduce l'altro.

Anche le forze d' attrito del nostro sistema materiale si rappresentano diversamente con due serie di parametri μ e M; la sostituzione (B), che trasforma gli uni negli altri, ed i cui coefficienti sono gli stessi che nella sostituzione precedente, ha dunque, nel caso attuale, questo significato, di esprimere la dipendenza che intercede fra i parametri μ di due qualunque delle infinite rappresentazioni diverse possibili per le forze d' attrito d' uno stesso sistema.

UN APPARECCHIO PER LA DIMOSTRAZIONE DEL PRINCIPIO DELL' AZIONE E DELLA REAZIONE,

del Prof. EMILIO COMINOTTO.

Se in un corso di meccanica si presenta qualche modo di dimostrare la terza legge della dinamica, manca però un' apparecchio che dia di questa legge una dimostrazione pronta affinchè meglio si presti agli usi didattici. A sifatta dimostrazione risponde benissimo un' apparecchio da me ideato e che mi ha servito efficacemente nella scuola.

Esso consta di due bilance indipendenti, di eguale sensibilità, sospese al medesimo asse mediante cuscinetti d' acciaio annulari fissativi attraverso. Una di esse AB (fig. 1) è piegata a forchetta e comprende fra le sue aste l' altra CD girevole

con essa intorno al medesimo asse K. La bilancia C D è foggiata a staffa intorno all' asse comune di rotazione K. Questo

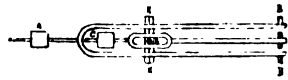


Fig. 1.

è fornito dallo spigolo saliente d' un coltello, trattenuto alla sommità E (fig. 1) d' una colonnetta F (fig. 2 e 3) mediante una madrevite la cui vite sta alla base d' una asticella I fissata

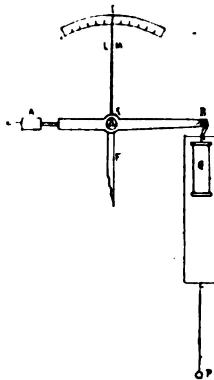


Fig. 2.

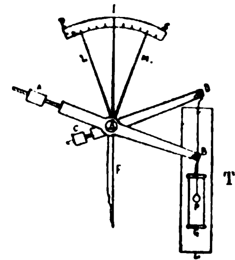


Fig. 3.

alla sommità della colonnetta F. L' asticella I attraversa il coltello nel mezzo E (fig. 1) innalzandosi al disopra delle bilance dentro la staffa della bilancia C D. La bilancia A B porta alle sue estremità B B (fig. 1 e 4) due coltelli a spigolo saliente sporgenti all' esterno cui si appoggiano i ganci di due aste che sorreggono un bicchiere G riempito d' acqua. La bilancia C D porta al suo estremo D un coltello fissatovi attraverso il cui spigolo saliente è allineato con quelli in B B della bilancia A B. A cavaliere delle due porzioni sporgenti del coltello in D ai lati del braccio della bilancia C D, appoggiano i ganci d'una staffa (fig. 4) che regge un telaio T rettangolare il cui piano passa per

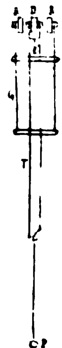


Fig. 4.

l' asse del bicchiere che esso circonda e per l' asse di simmetria comune alle due bilance. A metà di ciascuno dei lati orizzontali si sospende alternativamente un peso P mediante un filo metallico. Alle estremità opposte a quelle dove son sospesi il bicchiere ed il telaio, le bilance terminano con due viti le cui madreviti A e C servono a stabilire il loro equilibrio. Due indici lunghi e leggeri L ed M fissati perpendicolarmente sopra le due bilance, stanno dinanzi all'asticella I e la ricoprono quando le bilance sono in equilibrio.

Si prepara l' apparecchio all' esperienza sospendendo il peso P al lato orizzontale inferiore del telaio T e manovrando le madreviti A e C fino ad ottenere l' equilibrio nelle due bilance. Ottenuto tale equilibrio, si immerge il corpo P nell' acqua del bicchiere, sospendendolo al lato orizzontale superiore del telaio (fig. 3). La spinta che riceve il corpo P e la reazione che si esercita nel fondo del bicchiere fanno rispettivamente girare gli indici L ed M delle stesse quantità angolari ed in senso contrario, segnate su un' arco graduato PS, fissato all' asticella I.

Gabinetto di Fisica del R. Istituto tecnico di Chieti.

LIBRI NUOVI

L' ELETTRICITÀ ALLA PORTATA DI TUTTI. - IL RADIO E LE NUOVE RADIAZIONI.

G. CLAUDE.

(Pag. 460 con 280 fig. L. 6. Carlo Clausen, Torino).

Il chiaro ingegnere francese Giorgio Claude si è proposto con quest' opera di volgarizzare l' elettricità. E l' ha fatto con tale successo da meritare un premio dall' Accademia delle Scienze di Parigi, e l' onore di cinque edizioni francesi oltre a due traduzioni: in spagnolo e in italiano.

L'A. ha superato le difficoltà dell' esposizione di un argomento così difficile con una semplicità di mezzi veramente mirabile; perchè in tutto il libro non si fa uso che di nozioni

elementari. Inoltre l'opera è svolta con forma così brillante, da renderla una piacevolissima lettura.

Per questo è da raccomandarsi vivamente a quelli che, pur non avendo cognizioni estese di fisica e di matematiche, vogliono avere un'idea chiara del modo come agisce la più importante forma di energia. A. O.

DIE PHYSIKALISCHEN EIGENSCHAFTEN DER SEEN,

von D.r O. *von und zu* AUFSESS.

(Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1905).

Questo volumetto fa parte di una raccolta di monografie riguardanti soggetti di scienze naturali e di matematica, e tratta con brevità e chiarezza le questioni più importanti che si riferiscono alle proprietà fisiche dei laghi. Dopo una introduzione sulla forma della superficie, viene trattato il moto ondoso e la propagazione del suono nelle acque; ma la parte prevalente e più attraente è quella che si riferisce alle proprietà ottiche, e specialmente alla colorazione che assumono le acque dei diversi laghi. Per ultimo si ha lo studio della termometria e della calorimetria dei laghi.

Una larga bibliografia permette poi, a chi sia desideroso di approfondire qualche speciale questione, la ricerca dei principali lavori originali sulle acque dei laghi e del mare.

A. S.

DIE DARSTELLUNG DES ZINKS AUF ELEKTROLYTISCHEM WEGE,

von Dr. Ing. EMIL GÜNTHER.

(Halle, Knapp, 1904.)

Qualche anno fa ci fu un attivo lavorio per la preparazione dello zinco per via elettrolitica, e furono chieste ed ottenute numerose patenti: ora forse è un po' diminuito l'interesse per questo genere di ricerche. Ma come erano eccessive le speranze che si riposero prima in questo metodo, così non si deve ora credere che esso debba essere privo di pratica utilità.

L' A. è stato parecchi anni occupato in fabbriche di zinco elettrolitico, e non esita punto a dichiarare che non si deve mettere tra le cose impossibili che si possa avere una fabbricazione remunerativa con questo metodo.

L' Autore espone prima le proprietà generali dello zinco, indi accenna al suo ottenimento con procedimenti metallurgici e tratta quindi ampiamente della elettrolisi delle soluzioni acquose dei sali di zinco e di quella dei sali fusi. Termina esponendo degli utilissimi calcoli circa le spese di fabbricazione.

Il libro di 245 pagine con 59 incisioni è utilissimo per quanti si occupano di questo importante ramo della elettrochimica applicata. G. G.

DIE ELEKTROLYTISCHE RAFFINATION DES KUPFERS

von T. ULKE.

Tradotto in tedesco da VIKTOR ENGELHARDT.

(Halle presso Knapp, 1904).

È noto che i direttori della maggior parte degli impianti elettrolitici ben difficilmente fanno visitare e studiare le loro fabbriche a persone estranee, cosicchè è assai difficile il potere dare esatte comunicazioni su questo genere di industria.

Il sig. Ulke ha avuto invece l' occasione di potere visitare personalmente molti dei più importanti impianti elettrolitici, in alcuni dei quali ha anche lavorato, cosicchè esso ci può dare esatte informazioni su molti particolari di fabbricazione, che generalmente rimangono quasi segreti. Inoltre esso si è tenuto in corrispondenza con quasi tutti gli elettrometallurgisti d' Europa, e d'America, e ha potuto così scrivere un libro veramente pregevole per l' esattezza e la ricchezza delle notizie.

Vengono nel libro descritti i metodi in uso negli Stati Uniti d'America, in Inghilterra, in Germania, in Austria, in Francia, in Russia.

Come appendice vengono indicate le principali patenti e le varie spese di fabbricazione. G. G.

METEOROLOGIA GENERALE,

di LUIGI DE' MARCHI.

Professore di geografia fisica e meteorologia nella R. Università di Padova.

(2ª. edizione rifatta e ampliata con 13 fig. intercalate nel testo e 6 tavole. Milano. Ulrico Hoepli, 1905).

Il manualetto di 225 pagine è diviso in 4 sezioni: nella prima tratta dei componenti dell' aria e delle loro proprietà fisiche, del vapore acqueo, dell'elettricità atmosferica; nella seconda delle condizioni di equilibrio e di moto dell' aria e perciò dei venti periodici e non periodici, e delle leggi che presiedono ai loro movimenti; nella terza della temperatura dell' aria, della distribuzione di essa nell' estate e nell' inverno a seconda dell' altitudine, delle latitudini e delle altre cause cui essa è collegata, delle sue variazioni periodiche; nella quarta intitolata ai fatti meteorologici irregolari, dei cicloni ed anticicloni, dei temporali; e finalmente dei principj della previsione del tempo. Il libro, dettato soprattutto per gli studiosi che desiderano conoscere lo stato attuale della meteorologia, è modellato sulla prima edizione apparsa or sono sedici anni; ma poichè d'allora in poi, come dice l' Autore nella prefazione, le nostre cognizioni sulla composizione dell' aria si sono allargate, la fisica delle trasformazioni del vapore, le condizioni statiche e dinamiche in una colonna atmosferica verticale sono concepite in modo affatto differente, la teoria degli strumenti meteorologici e la funzione dell'elettricità atmosferica sono assai meglio definite, così per le numerose aggiunte e le notevoli modificazioni questa seconda edizione si presenta come un libro nuovo, che, senza essere un ponderoso trattato, offre ai leggitori cui è destinata tutte le cognizioni fondamentali di questa importantissima scienza, che giovandosi dei nuovi mezzi di osservazione e di comunicazione è pur essa sulla via di un rapido progresso.

T. Gigli.

KÜNSTLICHER GRAPHIT

von FRANCIS A. I. FITZ-GERALD.

Chemiker der international Graphite Co. Niagara — Falls N. Y.
ins Deutsche übertragen von Dr. MAX KUTHE
Chemiker der Siemens und Halske A. G., Wien. Mit 14 Figuren und 5 Tabellen im Text.

(Halle a. S. Verlag von W. Knapp).

È un opuscolo di 60 pagine, che, dopo un cenno storico degli studi sulle diverse varietà di carbone e sulla formazione della grafite da Despretz a Berthelot e da questo al Moissan, tratta degli elettrodi di grafite proposti da Castner pei processi elettrolitici, e del metodo di Girard e Street per grafitare gli elettrodi; dei processi di Acheson per la scomposizione del carburo di silicio e per la preparazione del carbonio puro, e della grafite dal carbone di antracite o da quello del petrolio, per la preparazione degli oggetti di grafite; delle proprietà della grafite ottenuta secondo Acheson; del processo di Rudolphs e Härden. Un appendice riferisce sulle esperienze di Fitz Gerald e Wilson riguardanti l'azione dei gas compressi (azoto, idrogeno, ossigeno, aria, anidride carbonica) sui carboni dell'arco voltaico, e quelle di A. Ludwig, che riscaldò il carbone ad alte temperature sotto pressioni che raggiunsero 4000 atmosfere, affine di tentarne la fusione e di avere il diamante. T. G.

ELEKTROLYTISCHES VERFAHREN ZUR HERSTELLUNG PARABOLISCHER SPIEGEL,

von SHERARD COWPER-COLES. (*London*).

Ins deutsche übertragen von Dr. EMIL ABEL
Chemiker der Siemens und Halske A. G., Wien. Mit. 13 Fig. und 2 Tabellen.

(Halle, Verlag von Wilhelm Knapp, 1904).

Gli specchj parabolici adoperati come riflessori, così importanti oggi per la navigazione come nell'arte della guerra, sono argomento di questo opuscolo di 17 pagine. Vi sono accennati i metodi di fabbricazione di essi proposti dal Petitjean, da A. Riddeal, da J. Jakobson, e vi è descritto accura-

tamente il metodo dell' autore dell' opuscolo, consistente nella preparazione di una forma di vetro, che viene dipoi arrotata, e sulla faccia convessa della quale si fa deporre per via elettrolitica uno strato di argento. T. G.

RIVISTA

Comptes Rendus. T. 138, Gennaio, 1904.

Becquerel H. ***Sulla luce emessa spontaneamente da alcuni sali d'uranio*** (pp. 184-187). — L'A. comunica che alcuni sali d'uranio, e specialmente quelli la cui fosforescenza alla luce è più intensa, sono spontaneamente luminosi nella oscurità, e l' intensità della luce emessa sembra restare indefinitamente costante. Fra questi sali quello che ha mostrato una emissione luminosa più intensa è stato il solfato doppio di uranile e di potassio. L'A. osserva che la emissione della luce in parola ha tutti i caratteri di un effetto prodotto dalla radioattività dell' uranio. Varie esperienze eseguite allo scopo di vedere se la luminosità di quel sale variava colla sua esposizione al raggiamento intenso di un arco elettrico o a quello di un sale di radio, hanno dato un risultato negativo e hanno portato quindi l'A. a concludere che la luminosità spontanea e permanente di quel sale si deve alla fosforescenza eccitata su esso dal raggiamento emesso dalla molecola di uranio in esso contenuta.

Per la debole intensità della luce emessa non è stato possibile all' A. eseguirne l' esame spettroscopico, ma l'A. pensa che questo spettro debba essere constituito dalle stesse bande che caratterizzano lo spettro di emissione per fosforescenza di ciascun prodotto.

Una stima fotometrica approssimata ha dato per l' intensità della luce emessa spontaneamente dal solfato doppio di uranile e di potassio un valore di circa ventimila volte più basso di quello della luce emessa da una preparazione di cloruro di radio, la cui attività è circa un milione di volte più grande della attività del sale di uranio. L'A. ne deduce quindi che l' ordine di grandezza degli effetti luminosi non è lo stesso di quello degli effetti del raggiamento esterno nella ionizzazione dell' aria.

Dewar e Curie. ***Esame dei gas occlusi o sviluppati dal bromuro di radio*** — Un pezzetto di bromuro di radio, disseccato, è

stato lasciato per tre mesi in un'ampolla di vetro comunicante con un piccolo tubo di Geissler e con un manometro a mercurio, in tutto l'apparecchio era stato fatto il vuoto perfetto. Durante i tre mesi gli A. hanno osservato che nell'apparecchio si sviluppava spontaneamente del gas, proporzionalmente al tempo, che l'esame spettroscopico alla fine dell'esperienza dimostrò essere idrogeno e vapore acqueo. Gli A. hanno attribuito il fenomeno alla decomposizione avvenuta sotto l'influenza del radio, di una piccola quantità di acqua introdotta forse nell'apparecchio insieme col sale.

Lo stesso pezzetto di bromuro di radio fu quindi posto in un'ampolla di quarzo, munita di un tubo della stessa sostanza, nella quale pure era fatto il vuoto. Fu quindi scaldato il tubo di quarzo fino alla fusione del bromuro di radio, continuandosi a fare il vuoto, e i gas sviluppati traversavano, prima di giungere alla pompa, tre piccoli tubi di vetro ad U, piazzati nell'aria liquida, che trattenevano la maggior parte della emanazione del radio e i gas meno volatili. I gas aspirati dalla pompa a mercurio furono quindi raccolti in una provetta di vetro sul mercurio, e si mostrarono radioattivi e luminosi. La luce emessa dalla provetta contenente i gas, dopo tre giorni di esposizione dinanzi a uno spettroscopio fotografico, dette uno spettro discontinuo, constituito da tre righe coincidenti coll'origine delle tre bande principali dell'azoto 3800, 3580 e 3370.

Facendo quindi passare la scintilla attraverso i gas trasportati in un tubo di Geissler si ottennero allo spettroscopio le bande dell'azoto, e condensando il gas nell'idrogeno liquido, la scintilla indicò la sola presenza di azoto.

Il tubo di quarzo contenente il bromuro di radio, fuso e liberato di tutti i gas occlusi, fu chiuso mentre si continuava a fare il vuoto. L'esame spettroscopico di questo tubo illuminato con una bobina di Ruhmkorff, eseguito dal Deslandres, venti giorni circa dopo la chiusura, rivelò l'*intero spettro dell'elio*, e uno spettroscopio fotografico in quarzo, dopo una posa di tre ore, rivelò soltanto le righe di quel gas.

L'esame spettroscopico infine della luce propria emessa dal tubo, senza la bobina, ha mostrato sempre uno spettro continuo senza righe nere o brillanti. Gli A. avvertono però di essersi serviti di uno spettroscopio poco dispersivo.

Poinsot A. *Su una legge sperimentale del trasporto elettrico dei sali disciolti* (pp. 192-194). — Nella sua tesi dottorale « *Su un nuovo trasporto elettrico dei sali disciolti* » Chassy ha stabilito che se in un peso E di acqua si trovano disciolti: un peso p_0 di

un sale elettrolizzato; dei pesi $p_1, p_2 \ldots$ di altri sali dello stesso acido non elettrolizzati; e si indica con q_e il trasporto dal sale elettrolizzato con q_1 e con q_2 quelli dei sali non elettrolizzati, riferendo il trasporto alla quantità di elettricità che deposita un equivalente di rame in un voltametro a solfato di rame, si hanno le relazioni seguenti:

$$q_1 = A_1 \frac{p_1}{\Sigma p}$$

$$q_2 = A_2 \frac{p_2}{\Sigma p}$$

$$q_e = q'_e + A_e \frac{p_e}{\Sigma p}.$$

Indicando inoltre con M_1, M_2 e M_e i pesi molecolari dei sali disciolti allo stato anidro, egli ha trovato approssimativamente la legge seguente:

$$\frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M_2} = \frac{A_e}{M_e} = 0{,}0636.$$

Dalle precedenti relazioni si rilevano facilmente le altre

$$\frac{q_1}{M_1} = 0{,}0636 \frac{p_1}{\Sigma p}$$

$$\frac{q_2}{M_2} = 0{,}0636 \frac{p_2}{\Sigma p}$$

$$\frac{q_e}{M_e} = 0{,}0636 \frac{p_e}{\Sigma p} + \frac{q'_e}{M_e}$$

$$\Sigma \frac{q}{M} = \frac{q'_e}{M_e} + 0{,}0636.$$

Ora poichè $\frac{q'_e}{M_e}$ non dipende, come ha mostrato Chassy, che dal rapporto $\frac{p_e}{E}$, che definisce la concentrazione del sale elettrolizzato, l'A. ne deduce la legge seguente:

Nella elettrolisi di un miscuglio di sali dello stesso acido, di cui uno è elettrolizzato, il numero totale delle molecole trasportate non dipende che dalla natura e dalla concentrazione del sale elettrolizzato. Esso è indipendente dalla presenza dei sali non elettrolizzati e dalla loro concentrazione.

Passando al caso di due sali elettrolizzati simultaneamente, la legge enunciata dall'A. è la seguente;

Quando vi sono due sali elettrolizzati, il numero totale delle molecole trasportate dipende dalla natura di questi sali, dalla loro concentrazione, dalla frazione di equivalente elettrolizzato di ciascun di essi. Esso non dipende dai sali non elettrolizzati e dallo stesso acido aggiunti ai due precedenti.

Ritornando al caso di un sale l'A. rileva che, come si è visto, essendo E e p_e costanti, anche $\Sigma \frac{q}{M}$ è costante, indipendente dai sali non elettrolizzati. Osserva quindi che quando p_e è piccolo rapporto a Σp, le 0,0636 molecole grammo trasportate sono quasi esclusivamente costituite dalle molecole di sali non elettrolizzati: il trasporto del sale elettrolizzato essendo press' a poco interamente rappresentato dal termine $\frac{q_e}{M_e}$.

Quando Σp diminuisce, una parte crescente delle 0,636 molecole è costituita da molecole del sale elettrolizzato, e quando $\Sigma p = p_e$, tutto il trasporto evidentemente è costituito da quelle molecole.

Ma poichè in tutti questi casi, $\Sigma \frac{q}{M}$ è costante, all' A. sembra naturale ammettere che le molecole del sale elettrolizzato che rimpiazzano nel trasporto, e in numero uguale, le molecole degli altri sali, sono trasportate nello stesso modo di queste ultime, vale a dire senza subire la dissociazione elettrolitica.

Il termine poi $\frac{q_e}{M_e}$ rappresenterebbe un trasporto dovuto al movimento degli ioni, come nella ipotesi d' Hittorf.

L'A. rileva che queste conclusioni, formulate pure dal Chassy senza le considerazioni molecolari da esso introdotte, non sono adottate nelle teorie ioniste attuali, e che sono contrarie alle ipotesi sulle quali si appoggia Kohlrausch per collegare la conduttibilità molecolare delle dissoluzioni ai numeri di trasporto.

P. Bacchi.

Philosophical Magaz. Serie VI, Vol. 8, 1904 e Vol. 9, 1905.

Eve A. S. *Sulla radiazione secondaria prodotta dai raggi β e γ del radio* (pp. 669-685). — Col metodo dell' elettroscopio l'A. ha studiato la radiazione prodotta dai raggi β e γ del radio che colpiscono i diversi corpi. Egli trova che la radiazione secondaria segue presso a poco l' ordine delle densità, come lo segue anche l' assorbimento. Le proprietà di questa radiazione secondaria mo-

strano che essa si deve ritenere costituita da particelle in moto cariche d'elettricità negativa, come la radiazione secondaria dovuta ai raggi Röntgen. E poichè i raggi catodici producono raggi Röntgen, che destano a loro volta raggi catodici, questo processo sembra reversibile; ed è probabile che i raggi Röntgen e i raggi β e γ producano tutti radiazioni secondarie tanto del tipo dei raggi Röntgen, quanto di quello dei raggi β.

Questi fatti portano a sospettare che ciò che fu osservato dal Paschen (*Drud's Ann.* 1904) fosse la radiazione secondaria dei raggi γ; perchè nessuno è riuscito a deviare i γ in un campo magnetico. Si deve dunque concludere o che i γ son costituiti da particelle in moto non elettrizzate, o che sono del tipo dei raggi Röntgen, o che hanno uno speciale carattere tuttora sconosciuto.

Teoricamente si potrebbe dire che l'emissione dei raggi β deve essere accompaguata da pulsazioni analoghe a quelle che si hanno allorchè si arrestano le particelle catodiche — e fino a prova in contrario è ragionevole ritenere che tali pulsazioni, analoghe ai raggi X, costituiscono i raggi γ.

SUTHERLAND W. *Origine elettrica della gravitazione e del magnetismo terrestre* (pp. 685-692). — L'A. parte dall'ipotesi che la materia sia formata da coppie di elettroni opportunamente carichi la cui inerzia costituisca l'inerzia della materia, e mostra come ciò possa condurre a ritenere che la gravitazione e il magnetismo terrestre sieno di origine elettrica.

JEANS J. H. *Determinazione della grandezza delle molecole dalla teoria cinetica dei gas* (pp. 692-699). — *Persistenza delle velocità molecolari nella teoria cinetica dei gas* (pp. 700-703). — Con le formole che si traggono dalla teoria cinetica, a dimostrare le quali è destinata la seconda Nota, l'A. determina la grandezza delle molecole per diversi gas, e trova dei valori, che concordano con quelli che si deducono dalla densità dei medesimi corpi allo stato liquido e solido. Pel diametro molecolare egli trova valori compresi fra $1,61 \times 10^{-8}$ e $4,61 \times 10^{-8}$.

TRAUBE I. *Contributo alla teoria dell'osmosi, della solubilità e della narcosi* (pp. 704-715). — L'A. esamina da prima i resultati di Overton (*Zeitsch. phys. Chem.* 22, p. 189, 1897), il quale studiando la velocità colla quale i composti chimici si diffondono nel protoplasma, avrebbe stabilito un parallelo fra tal velocità e la solubilità nei grassi, nella colesterina, nella lecitina ecc., ed avrebbe notato che l'efficacia di un narcotico dipenderebbe essenzialmente dalla sua solubilità lipolidica. Il Traube mostra come sia difficile ammettere questa ipotesi, perchè s'intenderebbe male come la sostanza lipoide non ritenesse tanto più stabilmente la

sostanza in essa disciolta, quanto più essa l'attira fortemente, cioè come le sostanze potessero passare nell'interno delle cellule in diretta proporzione della loro solubilità lipolidica.

Invece numerose esperienze, da lungo tempo istituite dal Traube per la determinazione delle costanti capillari, fanno ritenere che vi sia un parallelo fra la velocità dell'osmosi e la costante capillare. Le sostanze che non possono attraversare le membrane così dette semipermeabili, aumentano tutte la costante di capillarità dell'acqua. L'A. ritiene perciò che i fenomeni osmotici sieno determinati dalla differenza fra le tensioni superficiali del solvente e della soluzione. Se il solvente attraversa la membrana semipermeabile, è a motivo della sua tensione superficiale, che è minore di quella della soluzione.

L'A. mostra infine come i fenomeni di osmosi, di diffusione e di soluzione dipendano tutti da una medesima causa, che è la costante capillare dei corpi.

Michelson A. A. *Moto relativo della terra e dell'etere* (pp. 706-719). — L'A. indica un modo di sperimentare per decidere se l'etere è o no trascinato dal moto della terra, e che consiste nell'osservare l'interferenza di due fasci luminosi che si sono propagati in direzioni opposte parallelamente all'equatore. Se l'area racchiusa dal percorso dei due fasci fosse di 1 chilometro quadrato, l'A. dimostra che si dovrebbe avere uno spostamento uguale a 0,7 di una frangia.

Bragg W. H. *Sull'assorbimento dei raggi α, e sulla loro classificazione* (p. 719). — L'A. studia l'assorbimento che subiscono i raggi α, che resulta dipendere quasi interamente dalla densità e non dalla natura del corpo che attraversano. Egli indica come si possano tracciare le curve dell'ionizzazione prodotta dai raggi α a diverse distanze dalla loro origine. Tali curve accennano all'esistenza di 4 classi di raggi α, che differiscono per l'energia iniziale. I raggi α non sono deviati nel loro percorso attraverso i corpi, ma spendono tutta la loro energia nell'ionizzazione.

Bragg W. H. e Kleemann R. *Sulle curve d'ionizzazione del radio* (pp. 726-738). — Sono studiate le curve d'ionizzazione del radio depositato di recente, o dopo un certo tempo che è stato ottenuto per evaporazione. Esse confermano i resultati accennati nella Nota precedente, e le teorie e i resultati di Rutherford e Soddy.

È stato anche osservato che il potere ionizzante dei raggi α va crescendo in vicinanza dell'estremità delle loro traiettorie.

Townsend J. S. e Hurst H. E. *La genesi degli ioni pel moto di ioni positivi, e la teoria del potenziale esplosivo* (pp. 738-752). —

Il Townsend aveva mostrato (cfr. *N. Cim.* (5), 7, p. 77) che per una distanza *d* fra due lastre, che sodisfa all' equazione

$$\alpha - \beta \, e^{(\alpha-\beta) d} = 0 ,$$

ove α è il numero di molecole che sono ionizzate da un ione negativo che attraversa 1 cm. del gas, e β il corrispondente numero per un ione positivo, una corrente passerà fra le lastre anche senza l' azione di raggi ultravioletti. I valori di α e di β che corrispondono a dati valori della pressione p del gas e della forza elettrica X (in volts per centimetro) possono esser trovati sperimentalmente misurando la intensità della corrente che passa fra le lastre. Gli A. hanno trovato che realmente i valori sperimentali concordano con quelli teorici, tanto per l' aria che per l' idrogeno. Le esperienze poi mostrano che il potenziale sufficiente a mantenere una corrente fra le lastre è molto minore del potenziale esplosivo corrispondente alla distanza cui son poste e alla pressione del gas e dipende tanto dalla corrente che passa fra le lastre, quanto dalla pressione.

Non è quindi sostenibile l' ipotesi generalmente adottata, secondo la quale la caduta normale catodica del potenziale sarebbe uguale al potenziale richiesto per imprimere agli ioni positivi una velocità sufficiente per produrre nuovi ioni col loro urto sul catodo.

Morley E. V. e Miller D. C. ***Estratto da una lettera a Lord Kelvin*** (pp. 753-754). — Per riconoscere se il resultato negativo dell' esperienza di Michelson e Morley sul moto relativo della terra e dell' etere possa spiegarsi, come supposero Fitz Gerald e Lorentz, con un cambiamento nelle dimensioni dell' imbasamento di pietra prodotto dalla resistenza dell' etere stesso, gli A. hanno ripetuto quelle esperienze con un basamento di abete, che avrebbe dovuto subire variazioni maggiori della pietra; ma nemmeno con questo materiale si è avuto un resultato positivo, tantochè gli A. concludono che se un tale effetto sussiste, esso non supera certamente 0,005 di lunghezza d' onda.

Volume 9, 1905.

Young S. ***Sui punti di ebollizione dei composti omologhi*** (pp. 1-19). — È una ricerca sulle differenze che si presentano fra le temperature di ebollizione dei diversi termini delle serie omologhe di composti organici.

Sand H. J. S. ***Misura del potenziale agli elettrodi nei liquidi stazionari. Determinazione dei cambiamenti di concentrazione al catodo durante l' elettrolisi*** (pp. 20-41). — L'A. descrive un me-

todo che permette di misurare il potenziale agli elettrodi nei liquidi stazionari di qualunque natura, usando densità di corrente maggiore di quelle fin qui adoprate con altri metodi.

Con le soluzioni acquose di sali di rame, l'A. trova che fino a quando il sale resta nello strato di liquido che bagna il catodo, il metallo si deposita ad un potenziale che è quello del catodo; ma se il sale è portato via dalla corrente, si manifesta una rapida caduta di potenziale al catodo. Contemporaneamente aumenta la resistenza del liquido che circonda il catodo, per la formazione di un deposito di idrossido di rame, dovuto all' idrolisi del solfato di rame.

Fenomeni più complessi, che accennano a successive riduzioni dei sali, si presentano con le soluzioni alcooliche di sali di rame, o con soluzioni acide di nitrobenzene.

Makover W. *Pesi molecolari delle emanazioni del radio e del torio* (pp. 56-77). — Le misure furono fatte misurando la diffusione che si presenta, attraverso setti porosi, fra l' emanazione e diversi gas di noto peso molecolare, e applicando la legge di Graham.

Per la emanazione del radio l'A. trova valori compresi fra 99 e 85,5, e per quella del torio valori alquanto minori.

Williams W. E. *Sulle variazioni magnetiche della resistenza del ferro, del nichel e dell' acciaio al nichel a varie temperature* (pp. 77-85). — L' influenza della temperatura sul cambiamento di resistenza del ferro e del nichel con la magnetizzazione, è stata studiata dall'A. fino a 655° per campi magnetici compresi fra 0 a 900 C. G. S. I resultati sono rappresentati mediante curve — e mostrano che per alcune temperature la variazione di resistenza in campi elevati è negativa.

Hilton H. *Sulle proiezioni cristallografiche* (pp. 85-88). — È una trattazione analitica del problema generale delle proiezioni cristallografiche.

Stevenson J. *Storia chimica e geologica dell' atmosfera* (pp. 88-102). — In questo terzo capitolo del suo lavoro (cfr. *N. Cim.* (5), 5, p. 224), l'A. si occupa delle variazioni che ha subito la quantità di anidride carbonica contenuta nell' atmosfera, con speciale riguardo alla questione dei climi geologici.

Lyle T. R. *Ricerche sulle variazioni dell' isteresi magnetica con la frequenza* (pp. 102-124). — Secondo Steinmetz la perdita subita per isteresi in un ciclo chiuso a corrente continua è data da

$$U = \sigma B_{max}^{1,6} , \tag{1}$$

ove c varia con la natura e con le condizioni fisiche del ferro, e B_{max} è il massimo valore che l'induzione magnetica ha nel ciclo.

Se però il ferro percorre un ciclo con corrente magnetizzante alternata, e dalla perdita totale I di energia che esso subisce allora per cm^3 e per ciclo si toglie l'isteresi statica U data dalla (1) e si toglie ancora la perdita E che la teoria attribuisce alle correnti parassite, si ha un residuo $I - U - E$, che aumenta quando crescono la frequenza della corrente magnetizzante e la densità del flusso magnetico. Questo residuo è stato chiamato da Fleming la isteresi cinetica; e che questa causa di perdita esiste allorchè il ferro è sottoposto a forze magnetizzanti alternate è stato già mostrato da Steinmetz e da Siemens.

Per mezzo di un suo apparecchio, col quale o direttamente o fotograficamente si posson tracciare, in base a una deviazione galvanometrica, i valori istantanei di una f. e. m., di una corrente e di un flusso magnetico oscillante, l'A. ha eseguito uno studio sulle variazioni dell'isteresi magnetica con la frequenza. Nel corso delle sue ricerche egli ha avuto occasione di scoprire una nuova causa di perdita di energia, dovuta alla riflessione dell'energia propria delle armoniche del periodo fondamentale.

Dai resultati ottenuti dal Lyle per due anelli di ferro laminato ricotto, si vede che l'isteresi cinetica va crescendo al crescere dell'induzione e al diminuire della frequenza della corrente. Si vede ancora che per basse frequenze, il campo nel quale si possono ottenere correnti magnetizzanti sinusoidali è più piccolo che per frequenze più alte. Ciò si spiega ritenendo che ad una forza elettromotrice inducente sinusoidale corrisponda un'onda di flusso contenente gli armonici del 1°, 3°, 5°... ordine, e che gli armonici 3°, 5°... inducano nel circuito magnetizzante correnti di periodi $3n$, $5n$..., che appariranno come 3°, 5°... armonici nella corrente magnetizzante. È questo il caso scoperto dal Lyle, che costituisce una riflessione dell'energia che il ferro riceve dal primo armonico (frequenza n) della corrente magnetizzante, una parte della quale esso trasforma in energia di vibrazione di frequenza $3n$, $5n$... e che rimanda nel circuito primario, dove si dissipa sotto forma di calore.

Searle G. F. C. *Metodo per determinare la conduttività termica del rame* (pp. 125-129). — L'A. descrive un metodo che serve per esercitare gli studenti nella ricerca della conduttività in misura assoluta, e che riesce abbastanza esatto per sostanze molto conduttrici, come è il rame. La sbarra di rame in studio è tenuta ad un'estremità a una temperatura costante, circondandola con un manicotto ove si fa passare vapor acqueo, e l'altra estremità

è tenuta pure ad una temperatura costante, ma più bassa, circondandola con un serpentino ove scorre acqua fredda. Per determinare la conduttività della sbarra basta conoscere la temperatura iniziale e finale e la quantità dell'acqua che è passata pel serpentino, e la temperatura in due punti intermedi della sbarra.

MORROW J. e WATKIN E. L. *Apparato ad interferenza per la calibrazione degli estensometri* (pp. 129-134). — È una disposizione con la quale, utilizzando gli anelli di Newton che si formano fra una lastra di vetro e una lente, si elimina l'errore derivante dal passo morto delle viti micrometriche nell'aggiustamento e nella calibrazione degli estensometri.

CHREE C. *Sulla vibrazione laterale delle sbarre* (pp. 134-136). — Sono alcune osservazioni alla Nota del Garrett (cfr. *N. Cim.* (5), 9, p. 158).

DYKE G. B. *Sulla determinazione pratica dell' intensità media sferica delle lampade a incandescenza e ad arco* (pp. 136-147). — È la descrizione del metodo usato per misurare l'intensità luminosa delle lampade elettriche in diverse direzioni, coi resultati ottenuti dalle esperienze eseguite su molte lampade di tipi diversi.

BLANC G. A. *Sulla radioattività delle sorgenti minerali* (pp. 148-154). — Dalle ricerche dell'A. resulta che oltre l'attività e l'emanazione, probabilmente dovute a traccie di radio che molti fisici hanno osservato nei sedimenti di molte acque minerali e termali, in alcuni depositi si contiene un costituente radioattivo, che molto probabilmente è il torio, l'attività della cui emanazione si riduce a metà in circa un minuto, e che è capace di produrre attività eccitata che decresce col tempo e che si riduce a metà in circa undici ore.

SUMPNER W. E. *Misura di piccole differenze di fase* (pp. 155-166). — Per determinare la differenza di fase fra la corrente e la forza elettromotrice attive in un circuito induttivo, l'A. propone di disporre di seguito alla resistenza induttiva AB, in cui circola la corrente, una resistenza non induttiva BC, e di riunire gli estremi A e C con una resistenza non induttiva APC, e cercando un punto P tale su di essa che, unito attraverso un voltametro col punto B, renda minima la deviazione. La misura dei voltaggi che allora si hanno nei rami AB, BC e BP permette di costruire il triangolo che dà la differenza di fase cercata.

L'A. descrive anche un metodo per eseguire misure accurate di potenziali con le correnti alternate, raddrizzandole per mezzo di uno speciale motore sincrono, ed espone come si possano misurare differenze di fase fra i due circuiti di un trasformatore.

PLANCK M. *Sul teorema di Clausius pei cicli irreversibili e sull' aumento dell' entropia* (pp. 167-168). — Sono alcune osservazioni alla Nota di McF. Orr sul medesimo soggetto (*N. Cim.* (5), 9. p. 80).

POYNTING J. H. *Sulla spinta tangenziale di un fascio di luce che incide obliquamente sopra una superficie assorbente* (pp. 169-171). — Dalle esperienze di Lebedev e da quelle di Nichols e Hull resulta indubbiamente la pressione dovuta alla luce. Ma in quelle esperienze la luce incidova normalmente sulla superficie assorbente, ed era difficile separare la sua azione da quella del gas. L'A. ha sperimentato invece con luce obliqua, facendo cadere il fascio emesso da una lampada Nernst sopra un disco di vetro affumicato, di cm^2 2,75 fissato normalmente a una sottile sbarretta orizzontale di vetro, sostenuto da un filo di quarzo lungo 25 cm. All' altra estremità la sbarretta portava un disco uguale, ma orizzontale. Il sistema era tale che la deviazione di 1 div. della scala, osservata col solito mezzo dello specchio, corrispondeva a una forza tangenziale sul disco uguale a $0,483 \times 10^{-6}$ dine.

Allorchè la luce cadeva sul disco affumicato sotto l' incidenza di 45°, la deviazione che allora era massima, fu di 16,5 div. Da questi resultati l'A. calcola che l' energia del fascio luminoso incidente doveva essere $5,8 \times 10^{-6}$ per cm^2; e infatti, da misure calorimetriche fatte sullo stesso fascio di luce fu trovata uguale a $6,5 \times 10^{-6}$.

KIRKBY P. J. *Combinazione dell' idrogeno con l' ossigeno a basse pressioni pel passaggio dell' elettricità* (pp. 171-185). — Continuando le sue ricerche (*N. Cim.* (5), 7, p. 240) l'A. ha studiato l' influenza che sulla quantità del vapor acqueo formato durante il passaggio della elettricità esercitano la distanza fra le due armature del condensatore, e la natura dei metalli. A. S.

PIETRO SALVIONI, *gerente responsabile.*

VARIAZIONI MAGNETICHE DEL FERRO STAGIONATO PER NUOVE STAGIONATURE O RICOTTURE,

per D. MAZZOTTO.

1. **Scopo del lavoro.** — Per *rinvenimento* o *stagionatura* intendiamo quel processo pel quale il ferro, dopo aver subito l'azione prolungata di una temperatura elevata, viene mantenuto per un certo tempo ad una temperatura più bassa; il processo inverso, quello cioè con cui il ferro, dopo aver subito lungamente l'azione di una certa temperatura, viene sottoposto all' azione prolungata di una temperatura più elevata lo chiameremo *ricottura*.

Nei miei precedenti studi [1]) sulle variazioni che subiscono le proprietà magnetiche del ferro sottoposto a tali processi, le ricotture si eseguirono sempre al calor rosso vivo (700° circa) e le stagionature sempre su campioni preventivamente ricotti al rosso vivo, e chiameremo *normali* le ricotture o le stagionature eseguite in questo modo; nella presente nota studieremo anche l'effetto di stagionature e ricotture *frazionate*, cioè di stagionature a temperature basse di ferro già stagionato a temperatura più elevata, e di ricotture a temperature successivamente più elevate di ferro già stagionato a più bassa temperatura.

Nelle note III e IV esposi i risultati di stagionature normali eseguite su tre campioni di ferro a nove differenti temperature da 360° alla temperatura ordinaria, indicando gli effetti ottenuti ai varii stadii della stagionatura di mano in mano che se ne prolungava la durata. I risultati finali ottenuti per ogni singola temperatura sono in parte raccolti nella tabella I, nella quale i valori delle intensità magnetiche I,

1) Nota I. D. Mazzotto. Sul magnetismo susseguente. Nuovo Cimento, Serie 4, Vol. 11, pag. 81, 1900.

Nota II. Id. Effetto di lunghi rinvenimenti a varie temperature sulle costanti magnetiche del ferro. Nuovo Cimento, serie 5, vol. 3, pag. 417, 1902.

Nota III. Id. Stagionatura magnetica del ferro a temperature superiori all'ordinaria. Nuovo Cimento, serie 5, vol. 7, pag. 393, 1904.

Nota IV. Id. Stagionatura magnetica del ferro alla temperatura ordinaria. Nuovo Cimento, serie 5, vol. 8, pag. 5, 1904.

Risultati finali delle stagionature (1903).

I = *intensità magnetiche* M R °/₀ = *Magnetismo residuo in centesimi del m. indotto*

Tab. I.	H	Ricotture al rosso	Temperature e durate delle stagionature 360°	180°	159°	131°	100°	80°	62°	46°	Ord.a
			ORE								Mesi
		Medio	190	420	537	410	519	415	520	1062	38
Best	0,25	I=8	8	4	2	3	2	2	2	2	3
	0,5	18	16	10	4	6	4	4	4	5	7
	1,0	43	36	24	10	12	9	12	8	11	19
	2,0	120	109	69	38	32	30	32	32	39	66
	3,0	212	188	136	87	66	66	77	81	96	140
	5,0	400	352	326	241	188	190	204	222	254	298
	10	744	740	714	645	555	570	555	578	606	650
	15	905	885	889	855	790	795	793	818	833	840
	20	976	960	960	940	900	940	900	913	929	940
	30	1050	1038	1038	1020	1010	1020	1012	1020	1030	1040
	40	1090	1088	1083	1065	1070	1080	1075	1090	1085	1070
	M. R. °/₀	17	23	35	47	57	48	49	46	41	35
Svedese	0,25	I=6	4	2	2	2	2	2	2	3	3
	0,5	13	8	7	7	4	4	5	4	7	7
	1,0	30	25	16	16	12	9	11	10	19	20
	2,0	98	78	53	50	49	36	40	44	64	66
	3,0	195	166	119	113	120	90	99	110	137	141
	5,0	407	371	315	301	256	265	268	291	318	347
	10	770	740	716	695	670	670	655	669	692	745
	15	916	930	888	872	858	870	852	860	873	930
	20	981	980	961	945	938	960	940	945	954	985
	30	1050	1026	1037	1018	1022	1041	1032	1032	1045	1049
	40	1092	1080	1086	1060	1068	1092	1088	1082	1085	1100
	M. R. °/₀	34	39	51	53	53	54	54	52	50	40
Acciaio	0,25	I=4	4	3	3	3	3	3	3	4	4
	0,5	8	7	8	7	7	7	8	8	8	8
	1,0	18	8	16	14	15	15	17	16	18	19
	2,0	47	40	37	36	32	34	40	42	46	52
	3,0	89	86	66	62	56	59	73	82	82	101
	5,0	193	190	156	147	122	145	171	189	173	213
	10	537	530	470	485	440	425	510	545	484	575
	15	760	765	698	720	690	675	750	755	732	800
	20	850	840	811	820	800	790	842	855	833	905
	30	944	936	924	915	910	945	943	948	934	1010
	40	998	988	982	970	970	992	1000	998	995	1065
	M. R. °/₀	47	45	44	44	46	49	49	47	47	47

Risultati finali delle stagionature (1903).

Valori percentuali dedotti dalla tabella I.

TAB. II	H	Ricotture al rosso	Temperature e durate delle stagionature								
			360°	180°	159°	131°	100°	80°	62°	46°	Ord.ª
			ORE								Mesi
			190	420	537	410	519	415	520	1062	38
Best	0,25	100	100	50	25	37	25	25	25	25	37
	0,5	100	89	56	22	33	22	22	22	28	39
	1,0	100	84	56	23	28	21	28	19	26	44
	2,0	100	91	58	32	27	25	27	27	32	55
	3,0	100	89	64	41	31	31	36	38	45	66
	5,0	100	88	82	60	47	48	51	56	63	74
	10	100	99	96	87	75	77	75	78	82	87
	15	100	98	98	94	87	88	88	91	92	93
	20	100	98	98	96	92	96	92	94	95	96
	30	100	99	99	97	96	97	96	97	98	99
	40	100	100	99	98	98	99	99	100	100	98
	M. R.	100	136	200	277	331	274	285	263	241	202
Svedese	0,25	100	67	33	33	33	33	33	33	50	50
	0,5	100	61	54	54	31	31	39	31	54	54
	1,0	100	83	53	53	40	30	37	33	63	67
	2,0	100	80	54	51	50	37	41	45	65	67
	3,0	100	85	61	58	61	46	51	57	70	72
	5,0	100	91	77	74	70	65	66	71	78	85
	10	100	96	93	90	87	87	85	87	90	97
	15	100	101	97	95	94	95	93	94	95	101
	20	100	100	98	96	96	98	96	96	97	100
	30	100	98	99	97	97	99	98	98	100	100
	40	100	99	100	97	98	100	100	99	100	100
	M. R.	100	115	147	156	156	157	157	152	145	116
Acciaio	0,25	100	100	75	75	75	75	75	75	100	100
	0,5	100	87	100	87	87	87	100	100	100	100
	1,0	100	44	89	78	83	83	95	89	100	106
	2,0	100	85	79	77	68	72	85	89	98	111
	3,0	100	97	74	70	63	66	82	92	92	114
	5,0	100	99	81	76	63	75	89	98	90	110
	10	100	99	88	90	82	79	95	101	90	107
	15	100	100	92	95	91	89	99	99	96	105
	20	100	99	95	97	94	93	99	100	98	106
	30	100	99	98	97	96	100	100	100	99	107
	40	100	99	98	97	97	99	100	100	100	107
	M. R.	100	96	93	94	98	105	105	100	100	100

per varii campi da H = 0,25 ad H = 40 e del magnetismo residuo percentuale (M R °/₀) per un campo di media intensità (H = 6 circa), sono contrapposti alla media dei corrispondenti valori che presentò il campione sottoposto alle ricotture normali prima di incominciare a stagionarlo ad una nuova temperatura.

I valori del M. R. °/₀ sono quelli indicati colla stessa segnatura nelle terz' ultima riga delle tabelle numeriche della nota III, rappresentano cioè quanto per cento rimane, dopo interrotto il circuito, della intensità magnetica massima (e costante per lo stesso campione) raggiunta nel campo suddetto.

Per brevità si ommise nella tabella I, la riproduzione dei risultati relativi alla forza coercitiva, al magnetismo residuo (M. R.) nei campi intensi, all' isteresi ed altri dati contenuti nelle tabelle della nota III, come pure si limitò il numero dei valori di H pei quali sono esposti i valori delle intensità magnetiche.

I valori dell' ultima colonna, relativi alle stagionature a temperatura ordinaria, sono dedotti in parte (per H = 40, H = 5,0 ed H = 0,5) dalle tabelle della nota IV, e per gli altri valori di H da tabelle analoghe non pubblicate. I campioni ai quali si riferiscono questi valori, stante la grande durata (38 mesi) che si dovette dare in tal caso alla stagionatura per ottenere un certo grado di stabilità, non sono quelli stessi sui quali si praticarono le altre stagionature, ma si possono ritenere ad essi identici essendo stati tagliati dalle stesse sbarre.

A facilitare la discussione della tabella I è ad essa contrapposta la tabella II contenente i valori percentuali, ottenuti dai precedenti indicando in ciascuna riga con 100 il valore appartenente al campione ricotto. Si noti che i valori della tabella II, indicanti le variazioni percentuali delle intensità magnetiche I, rappresentano anche le variazioni delle suscettività I : H, che sono proporzionali alle prime, valendo per ogni riga lo stesso valore di H.

L' osservazione delle tabelle I e II conduce immediatamente a queste conclusioni principali :

I. La stagionatura del ferro ricotto diminuisce considerevolmente la suscettività nei campi deboli;

II. Questa diminuzione va rendendosi meno intensa coll'aumentare delle intensità del campo, fino a rendersi quasi insensibile per campi di intensità elevata;

III. Il M. R. aumenta nella stagionatura di pari passo colla diminuzione di suscettività.

IV. Le dette variazioni, dapprima aumentano, poi decrescono, al diminuire della temperatura di ricottura, raggiungendo quindi un massimo ad una temperatura determinata (verso 131°).

V. Il valore assoluto di queste variazioni varia considerevolmente colla natura del campione.

Fra i fatti così constatati mi parve degno di uno studio più approfondito quello della esistenza di un massimo di variabilità nelle ricotture verso i 131°, poichè, secondo l'idea che mi era formata sulla natura del fenomeno, mi pareva dovesse attendersi delle variazioni sempre crescenti coll'abbassarsi della temperatura di stagionatura, ed attribuiva perciò l'esistenza di quel massimo ad una perturbazione del fenomeno fondamentale.

Il quesito che mi proposi principalmente di risolvere in questa nota è il seguente:

Se stagionando il ferro a temperature inferiori a 131° non si potè ottenere, nè una suscettività così bassa, nè un M. R. così elevato come si erano ottenuti stagionando a 131°, è ciò dovuto al fatto che a queste temperature spetti un assettamento molecolare stabile, pel quale la suscettività è più alta ed il M. R. più basso che a 131°, od è piuttosto perchè questo assettamento molecolare stabile a quelle temperature non si è potuto ottenere per mancanza di tempo, per impedimenti molecolari o per altre ragioni?

Per rispondere a tale quesito mi proposi di portare dapprima i campioni al massimo di stagionatura a 131°, in condizioni cioè che presentassero il minimo di suscettività ed il massimo di M. R. e sottoporli poscia a stagionatura a temperatura più bassa. Nel caso di validità della prima interpre-

tazione, dovrebbe, durante la seconda stagionatura, risalire la suscettività e diminuire il M. R.; in caso di validità della seconda avrebbero dovuto variare in senso opposto, o per lo meno, rimanere costanti.

Vedremo come i risultati delle esperienze sieno favorevoli alla seconda interpretazione, e come, essendo per tal modo semplificata la natura del fenomeno, si possa, con semplice ipotesi complementare, far rientrare la spiegazione dei fenomeni prodotti dalla stagionatura nell' orbita della ordinaria teoria molecolare del magnetismo.

La temperatura prescelta per la seconda stagionatura fu, per le ragioni che si diranno appresso, quelle di 62°.

Nel corso del lavoro si presentò come studio complementare quello delle variazioni magnetiche prodotte sul ferro stagionato a bassa temperatura da ricotture a temperature successivamente crescenti.

Parallelamente allo studio delle variazioni della suscettività e del M. R. si aggiunse in questo lavoro quello delle variazioni del magnetismo susseguente (M. S.), il quale servì a stabilire un intimo legame fra questa e le altre variazioni prodotte dalla stagionatura.

2. **Materiale e metodo esperimentale.** — Furono studiati gli stessi due campioni di ferro Best e di ferro svedese, studiati nella nota III, ma per terzo campione sostituii all' acciaio, la cui bassa suscettività avea subito variazioni piccole ed alquanto irregolari, un campione di ferro di Germania, come quello il cui studio mi parve di maggior interesse, perchè, non ostante la sua suscettività elevata, mi avea presentato nella stagionatura a temperatura ordinaria (V. nota II, pag. 19 e 22) delle variazioni relativamente piccole nelle costanti magnetiche.

Il metodo di osservazione fu in massima quello stesso descritto nelle note II e III, però ho alquanto ristretto i limiti delle osservazioni; infatti, dopo constatato che nei campi elevati le variazioni di suscettività erano quasi nulle, mi parve inutile portare le osservazioni fino a quel limite e preferii arrestarle a campi meno intensi (a circa $H = 6$), il che mi permise di aumentare la sensibilità del magnetometro e della

bussola delle tangenti, ed aver così maggior esattezza nelle determinazioni in campi deboli, portando il limite inferiore da $H = 0{,}25$ ad $H = 0{,}1$.

Usai perciò nella bussola quattro circuiti invece di uno, e nel magnetometro allontanai la calamita direttrice dall'ago, in modo da approfittare dell'intera lunghezza delle scale pei valori massimi di I e di H che intendeva raggiungere.

Colla nuova sensibilità della bussola, l'intensità del campo, invece che colla formula (1) (Nota II pag. 6), si calcola colla formula

$$H = 0{,}0333\ N$$

e l'intensità magnetica invece che colla formula (2) (ivi pag. 7) si calcola colla formula

$$I = \frac{1{,}144}{d^2}\,\Delta = K\,\Delta$$

per cui i valori di K (essendo 7,04 mm. il diametro del nuovo campione di Germania) sono per le nuove esperienze i seguenti:

	Best	Svedese	Germania
K =	2,35	2,98	2,31

In ogni esperienza, dopo determinati, previa demagnetizzazione, i punti necessari alla costruzione della curva di magnetizzazione fino ad un campo, H, di circa 6 unità C. G. S., si determinava il M. R. aumentando, col mezzo di un reocordo e senza mai retrocedere, la corrente fino a che la deviazione del magnetometro corrispondesse ad una intensità magnetica massima:

$$I_{max} = 415,$$

costante per tutte le esperienze e per tutti tre i campioni; interrompendo poscia la corrente, restava una intensità residua I_r che rappresentava il M. R. corrispondente alla detta

intensità massima del magnetismo indotto. Il M. R. percentuale si calcolava perciò colla formula:

$$M. R. \% = \frac{100\, I_r}{415}.$$

3. **Determinazioni del magnetismo susseguente.** (M. S.) — Nella presente serie di esperienze non mi occupai, nè della determinazione dei valori della forza coercitiva, nè di quelli delle aree di isteresi, perchè, come si è veduto nel precedente lavoro (nota III) le variazioni di tali valori seguono parallelamente quelle del M. R.; introdussi invece, come dissi, una determinazione nuova, quella del magnetismo susseguente.

In un mio precedente lavoro (nota I) denominai magnetismo susseguente (magnetische nachwirkung - time lag in the magnetisaction - viscosité magnetique) quel fenomeno pel quale il ferro, all' istante in cui varia il campo magnetico in cui si trova, non assume immediatamente l' intensità magnetica che gli compete nel nuovo campo, ma, dopo aver subito una variazione $I_{,}$ istantanea, ne subisce una lenta $I_{,,}$, così che trascorrono alcuni minuti prima che raggiunga la variazione totale definitiva

$$I = I_{,} + I_{,,}.$$

Come misura del M. S. si suol prendere il rapporto $I_{,,}:I$ fra la variazione lenta e la variazione totale.

Nel caso che la determinazione si faccia, come nelle esperienze attuali, sopra campioni demagnetizzati, il valore di I rappresenta l' intensità magnetica finale.

Nel detto mio lavoro fu riconosciuto che, sottoponendo il ferro a ricotture e rinvenimenti a temperature elevate od a stagionatura alla temperatura ordinaria, il M. S. si modificava profondamente, e che nel medesimo tempo avvenivano delle variazioni nello stesso senso nella permeabilità (e quindi anche nella suscettività); ma siccome tali constatazioni erano state fatte incidentalmente e con determinazioni grossolane e solo relative della permeabilità, mi parve utile di approfittare delle nuove serie di osservazioni sistematicamente condotte, per meglio indagare le relazioni quantitative esistenti fra le

variazioni del magnetismo susseguente e quelle delle altre proprietà magnetiche, a stadî ben determinati della stagionatura.

Per le determinazioni del M. S. ho dovuto applicare all' apparato magnetometrico due aggiunte:

I. ad est del magnetometro, una slitta scorrente su quattro guide parallele di legno, che permetteva di avvicinare più o meno la spirale magnetizzante all' ago, ed ottenere così in tutte le determinazioni, non ostante le differenze di suscettività, una eguale deviazione dell' ago senza mutare l' intensità del campo magnetizzante. Tale intensità fu costantemente di 0,3 unità C. G. S. colla quale si otteneva, a magnetizzazione completa, una deviazione di 120 divisioni della scala:

II. ad ovest del magnetometro, un' altra slitta a movimento micrometrico, che serviva ad avvicinare più o meno al magnetometro la spirale compensante (Vedi nota I pag. 84) fino ad annullare il primo impulso dato all' ago dal magnetismo istantaneo al momento della chiusura del circuito.

Per la determinazione del M. S. ho leggermente modificato il metodo descritto nella nota I. Prima dell'osservazione l' ago del magnetometro veniva condotto allo zero, invece che col mezzo di una calamita ausiliaria, decalamitando l' ago col solito processo delle correnti alternate decrescenti. Poscia, dopo essermi assicurato che la spirale compensante, la cui corrente agiva sull' ago in antagonismo colla magnetizzazione del campione, fosse abbastanza vicina al magnetometro da avere, all' istante della chiusura del circuito, una azione prevalente, indicata da un' impulso istantaneo dell' ago nel verso dell' azione della spirale susseguito da uno spostamento in senso opposto (salto dell'ago), allontanava micrometricamente la spirale dal magnetometro fino a che il salto dell' ago, prodotto da una chiusura momentanea del circuito, fosse ridotto a zero. In tali condizioni, l' azione della spirale equilibrava il magnetismo istantaneo I, della sbarra studiata.

A produrre tale chiusura momentanea della corrente, meglio del tasto telegrafico prima usato, mi servì il seguente metodo, che io chiamo del *contatto strisciante:* delle due estremità del filo che doveano mettersi a contatto per stabilire

la continuità del circuito, l' una era fissa sul tavolo, l' altra tenuta a mano e mossa, all' istante dell' esperienza, con certa rapidità trasversalmente alla prima, in modo da stabilire un contatto di brevissima durata.

Annullato il salto dell' ago, si lasciava il circuito permanentemente chiuso e si osservava la deviazione susseguente dell' ago, nel verso opposto a quello in cui era avvenuto il salto e quindi nel verso dell' azione del ferro, deviazione che dopo alcuni minuti si rendeva sensibilmente costante. Tale deviazione definitiva dava la misura del magnetismo susseguente $I_{\prime\prime}$.

Si allontanava finalmente la spirale compensante, tanto che non avesse azione alcuna sul magnetometro, pur essendo percorsa dalla corrente, e si otteneva così nel magnetometro una deviazione maggiore, dovuta esclusivamente al ferro, la quale rappresentava il magnetismo totale I.

Da questi valori, col mezzo della formula:

$$M.\ S.\ \%_0 = \frac{100\, I_{\prime\prime}}{I}$$

si calcola il magnetismo susseguente percentuale M S $\%_0$, che rappresenta quanto per cento del magnetismo totale, I, è comparso sotto forma di magnetismo susseguente.

4. **Stagionatura a 131°**. — I tre campioni furono accuratamente ricotti a circa 700° nel solito bagno di piombo (Vedi nota II pag. 424) e, dopo averli lasciati alla temperatura ordinaria per oltre 12 ore, se ne determinavano, previa demagnetizzazione, i punti delle curve di magnetizzazione facendo variare per gradi il campo magnetizzante fino a che avesse un valore prossimo ad H=6, e lo si aumentava poi ancora, col mezzo del reocordo, in modo continuo, fino a che l'intensità magnetica avesse raggiunto il massimo prestabilito di 415 unità. Interrotto allora il circuito si determinava l' intensità magnetica residua I_r.

Praticata di nuovo la demagnetizzazione, si determinava il M. S. seguendo il metodo indicato nel precedente paragrafo.

I campioni venivano poi portati nel solito tubo di ferro a ricaduta (Vedi nota II pag. 424) contenente alcool ami-

lico in ebollizione (131°) e quivi stagionati per 63 ore in sei riprese rispettivamente di 1, 2, 4, 8, 14 e 34 ore. Dopo ogni ripresa i campioni venivano estratti dal recipiente di stagionatura, e, dopo un riposo di 12 ore all'aria, sottoposti ad una nuova determinazione dei punti della curva di magnetizzazione, del M. R. e del M. S. nel modo sopra indicato.

Descritte le curve di magnetizzazione, se ne dedussero, per interpolazione grafica, le intensità magnetiche, I, registrate nella tabella III, per ogni singolo stadio di stagionatura, in corrispondenza ai rispettivi valori di H segnati nella prima colonna.

Nelle tabelle parziali relative al ferro Best ed al ferro svedese sono aggiunte, per agevolare i confronti, due altre colonne contenenti i valori *minimi* di I ottenuti nelle stagionature a 131° ed a 62° eseguite sugli stessi campioni nel 1903. Questi valori minimi possono essere inferiori ai valori finali riprodotti nella tabella I in causa del ricupero parziale della suscettività che talvolta ha luogo nelle stagionature molto prolungate (Vedi nota III pag. 409).

In calce alla tabella sono registrati i valori percentuali del magnetismo residuo e del magnetismo susseguente, M. R. °/₀ ed M. S. °/₀.

Coi valori della tabella III furono calcolati i loro percentuali della tabella IV riferiti al ferro ricotto, pei quali vale l' osservazione già fatta per la tabella II, che cioè le variazioni percentuali delle intensità magnetiche rappresentano pure le variazioni percentuali della suscettività.

Stagionatura a 131° dei campioni ricotti (1905).

M. S. °/₀ = *Magn. susseguente in centesimi del magn. finale* (H = 0,30).

TAB. III.	H	Ricotti al rosso	Durata della stagionatura in ore						Stag.re 1903	
			1	3	7	15	29	63	131°	62°
Best	0,1	I=2,4	1,4	0,5	0,4	0,4	0,5	0,45	—	—
	0,2	5,6	2,9	1,3	1,0	1,0	1,1	1,0	—	—
	0,25	7,3	3,9	1,7	1,3	1,3	1,3	1,3	1	2
	0,3	9,1	4,9	2,1	1,7	1,7	1,7	1,6	—	—
	0,5	17,1	9,7	4,1	3,2	3,5	3,1	3,0	2	4
	1,0	42	29	11,1	7,5	7,2	7,2	6,7	6	8
	1,5	79	54	23	14	12	12	12	10	16
	2,0	121	90	42	24	21	21	20	17	32
	3,0	214	174	100	58	51	52	50	49	81
	4,0	305	260	178	117	100	103	100	100	147
	5,0	394	346	258	189	167	169	166	172	222
	6,0	482	—	—	—	—	—	236	245	300
	M. R. °/₀	19	25	41	53	55	55	55	58	46
	M. S. °/₀	41	22	6	2	0	0	0	—	—
Svedese	0,1	I=2,0	1,7	1,1	0,7	0,6	0,7	0,7	—	—
	0,2	4,3	3,8	2,5	1,4	1,3	1,3	1,3	—	—
	0,25	5,6	5,0	3,2	1,7	1,7	1,7	1,7	2	2
	0,3	7,1	6,2	4,0	2,4	2,1	2,1	2,1	—	—
	0,5	13,5	11,9	7,3	4,6	3,9	4,0	3,9	4	4
	1,0	34	29	21	12,4	10,1	10,0	9,5	10	10
	1,5	65	59	43	27	21	21	19	20	23
	2,0	105	97	73	46	36	36	35	36	44
	3,0	205	192	156	112	90	90	87	98	110
	4,0	312	297	252	196	170	167	167	177	195
	5,0	409	396	345	285	259	258	255	268	288
	6,0	512	—	—	—	—	—	340	359	380
	M. R. °/₀	34	37	43	52	57	57	57	57	52
	M. S. °/₀	31	23	10	3	0	0	0	—	—
Germania	0,1	I=2,0	2,0	1,5	1,1	1,1	1,1	0,8	—	—
	0,2	4,9	4,6	3,3	2,5	2,6	2,3	1,7	—	—
	0,25	6,2	6,2	4,6	3,3	3,3	2,9	2,5	—	—
	0,3	8,0	7,8	5,9	4,3	4,1	3,6	3,2	—	—
	0,5	15,5	15,5	12,6	9,2	8,2	7,3	6,4	—	—
	1,0	40	40	35	28	24	23	20	—	—
	1,5	76	75	67	57	50	47	42	—	—
	2,0	118	116	108	94	83	78	73	—	—
	3,0	219	212	204	189	174	169	164	—	—
	4,0	318	311	303	285	272	271	258	—	—
	5,0	416	407	400	380	366	365	351	—	—
	6,0	514	—	—	—	—	—	447	—	—
	M. R. °/₀	21	21	22	26	29	30	30	—	—
	M. S. °/₀	36	33	24	12	3	0	0	—	—

Stagionatura a 131° dei campioni ricotti (1905).

Valori percentuali dedotti dalla tabella III.

TAB. IV.	H	Ricotti al rosso	Durata della stagionatura in ore						Stag.re 1903	
			1	3	7	15	29	63	131°	62°
Best	0,1	100	59	21	17	17	21	19	—	—
	0,2	100	52	23	18	18	20	18	—	—
	0,25	100	53	23	18	18	18	18	14	28
	0,3	100	54	23	19	19	19	18	—	—
	0,5	100	57	24	19	18	18	17	12	23
	1,0	100	65	26	18	17	17	16	14	19
	1,5	100	68	29	18	16	16	15	13	20
	2,0	100	74	35	20	17	17	17	14	27
	3,0	100	81	47	27	24	24	23	23	38
	4,0	100	85	58	38	33	34	33	33	48
	5,0	100	88	66	48	42	43	42	44	56
	6,0	100	—	—	—	—	—	49	51	62
	M. R.	100	133	215	277	290	289	290	306	244
	M. S.	100	54	15	5	0	0	0	—	—
Svedese	0,1	100	85	55	35	30	35	33	—	—
	0,2	100	89	58	33	30	30	31	—	—
	0,25	100	90	57	30	30	30	30	36	36
	0,3	100	87	56	35	30	30	30	—	—
	0,5	100	88	54	34	29	30	29	30	30
	1,0	100	85	60	36	30	29	28	29	29
	1,5	100	91	66	41	32	32	30	31	35
	2,0	100	92	69	44	34	34	33	34	42
	3,0	100	94	76	55	44	44	42	48	54
	4,0	100	95	81	63	55	54	54	57	63
	5,0	100	96	83	69	63	62	62	66	70
	6,0	100	—	—	—	—	—	66	70	74
	M. R.	100	106	125	150	164	166	165	165	150
	M. S.	100	74	32	10	0	0	0	—	—
Germania	0,1	100	100	75	55	55	55	40	—	—
	0,2	100	93	67	51	53	47	35	—	—
	0,25	100	100	74	53	53	47	40	—	—
	0,3	100	97	74	54	51	45	40	—	—
	0,5	100	100	81	59	53	47	41	—	—
	1,0	100	100	87	69	60	55	51	—	—
	1,5	100	99	88	75	66	62	55	—	—
	2,0	100	98	92	80	70	66	61	—	—
	3,0	100	97	93	86	80	77	75	—	—
	4,0	100	98	95	89	85	85	81	—	—
	5,0	100	98	96	91	88	88	84	—	—
	6,0	100	—	—	—	—	—	87	—	—
	M. R.	100	102	108	126	141	143	147	—	—
	M. S.	100	92	67	33	8	0	0	—	—

5. **Confronti colle esperienze precedenti.** — Dall' osservazione delle tabelle III e IV risultano intanto i fatti già noti, cioè :

I. La rapida ed intensa diminuzione della suscettività magnetica colla stagionatura a 131°.

II. L' affievolimento subito da tal variazione coll' aumentare della intensità del campo.

III. Il rapido ed intenso aumento del magnetismo residuo.

Riguardo alla diminuzione di suscettività, osserveremo che il valore finale raggiunto dopo 63 ore di stagionatura è pel ferro svedese già minore del minimo ottenuto nella corrispondente stagionatura del 1903, ma che nel ferro Best esso è, pei piccoli valori di H, ancora leggermente superiore al minimo del 1903. Mi arrestai però a questo punto, per tema che, con una stagionatura più prolungata, incominciasse il fenomeno di ricupero, già osservato nelle stagionature a 131° del 1903, pel quale la suscettività venisse ad aumentare.

Del resto, siccome si dovranno poi sottoporre i campioni alla stagionatura a 62°, ciò che più preme è il rilevare, come risulta dalle tabelle, che allo stato in cui si trovano attualmente i campioni, i valori delle intensità magnetiche raggiunte sono tutti inferiori a quelli ottenuti nel 1903 colla stagionatura a 62°.

Analoghe osservazioni valgono per l' aumento del M. R.

Il nuovo campione studiato (ferro di Germania) si comportò qualitativamente come gli altri due campioni, ma presentò variazioni più lente e meno intense.

Dalla tabella IV si rileva infatti che le diminuzioni di suscettività, nei tre campioni furono :

Best	Svedese	Germania
	nei campi deboli	
83	70	60 %
	nei campi forti	
51	34	13 %

e gli aumenti di magnetismo residuo:

Best	Svedese	Germania
190	65	47 %

e tali variazioni si compirono in:

7	15	63 ore

Dalla tabella I risulta inoltre che la suscettività assoluta $\frac{I}{H}$ nel campo $H = 6$, che è assai prossimo al campo di suscettività massima, ed il M. R. % corrispondente al campo stesso erano:

nei campioni ricotti

$\frac{I}{H}$	$\frac{482}{6} = 80$	$\frac{512}{6} = 85$	$\frac{514}{6} = 86$
M. R. %	19	34	21

e nei campioni stagionati

$\frac{I}{H}$	$\frac{236}{6} = 39$	$\frac{340}{6} = 57$	$\frac{447}{6} = 75$
M. R. %	55	56	31

dal che si vede che, mentre nello stato di ricottura il ferro di Germania era circa equivalente agli altri due campioni, dopo la stagionatura è ad essi di molto superiore per elevata suscettività e basso M. R.

6. **Limiti delle diminuzioni di suscettività.** — Nelle esperienze precedenti restò indecisa la questione (Vedi nota III pag. 407) se la diminuzione percentuale di suscettività aumentasse indefinitamente al diminuire del campo (ciò che avrebbe condotto, per campi sufficientemente deboli e campioni fortemente stagionati, a suscettività uguali o molto prossime a zero) o se tale diminuzione avesse un limite.

Le esperienze attuali, grazie alla maggior sensibilità date agli apparati la quale permise maggior precisione nelle determinazioni in campi deboli, dimostrano che la diminuzione percentuale di suscettività prodotta dalla stagionatura, dopo rag-

giunto un limite massimo per un certo campo, rimane sensibilmente costante pei campi ad esso inferiori.

Così pel ferro Best, nei campi inferiori ad $H = 3$, la suscettività, riferita al valore che avea nel campione ricotto, è ridotto al 17 %; nel ferro svedese, nei campi inferiori ad $H = 2$, è ridotta al 30 %. ed è ridotta al 40 %, nei campi inferiori ad $H = 0.75$, nel ferro di Germania.

7. **Variazioni del magnetismo susseguente.** — Le tabelle III e IV mostrano chiaramente la diminuzione rapida, fino all' estinzione, del M. S. col procedere della stagionatura.

È interessante osservare che il M. S., dopo aver diminuito di mano in mano che diminuiva la suscettività, si rende insensibile al tempo stesso in cui la stagionatura riduce la suscettività al suo minimo ed il M. R. al suo massimo valore, cioè dopo 15 ore di stagionatura pei ferri Best e svedese e dopo 29 ore pel ferro di Germania.

Queste intime relazioni fra i tre fenomeni, rafforzate dal fatto constatato nella nota I pag. 106 che il M. S. ha la massima intensità nei campi deboli nei quali sono pure massime le variazioni di suscettività, possono facilmente interpretarsi ammettendo che sieno le variazioni del M. S. la causa totale o parziale delle variazioni di suscettività e di M. R.

Infatti la magnetizzazione totale può considerarsi distinta in due parti, cioè la magnetizzazione istantanea e la magnetizzazione susseguente; tutte le cause che determinano la diminuzione o l' annullamento della magnetizzazione susseguente diminuiranno perciò la magnetizzazione totale e quindi la suscettività.

E se non vi sono altre cause agenti, il minimo della suscettività si avrà al tempo stesso in cui si annulla il M. S.

Analogamente, al crescere del campo magnetizzante, la perdita di magnetizzazione è in parte istantanea ed in parte susseguente; se intervengono cause che diminuiscano od annullino la parte susseguente, la perdita di magnetizzazione andrà riducendosi alla sola porzione istantanea e perciò il M. R. aumenterà; e siccome, per quanto fu dimostrato nella nota I pag. 88 il M. S. di magnetizzazione è sempre uguale al M. S. di demagnetizzazione, così colla stagionatura, al di-

minuire di M. S. di magnetizzazione diminuirà anche quello di magnetizzazione, determinando un aumento del M. R.; e, se non intervengono altre cause, il massimo M. R. avrà luogo al momento stesso in cui diventa nullo il M. S.

Per conseguenza, il fatto sopra rilevato, che allo stadio di stagionatura pel quale si rende insensibile il M. S. si rendono pure insensibili le variazioni di suscettività e di M. R. può fare credere che le variazioni di M. S. sieno la causa unica delle variazioni di suscettività e di M. R.

Se così fosse, si potrebbe stabilire una relazione quantitativa fra le variazioni di intensità magnetica, di magnetismo susseguente e di magnetismo residuo prodotte dalla stagionatura in uno stesso campo.

Sieno infatti per la magnetizzazione in un dato campo:

I_r l'intensità magnetica del ferro ricotto

I_s » » » stagionato

$S = M. S. \%$ il magnetismo susseguente percentuale di magnetizzazione.

Sarà:

$$I_r - I_s$$

l'intensità magnetica susseguente, ed

$$S = 100 \frac{I_r - I_s}{I_r} = M. S. \% \tag{1}$$

il magnetismo susseguente percentuale.

Analogamente, indicando per la demagnetizzazione con:

R_r il magnetismo residuo percentuale del ferro ricotto,

R_s » » stagionato,

S' il magnetismo susseguente percentuale di demagnetizzaz.;

sarà:

$100 - R_r$ la perdita di magnetismo del ferro ricotto,

$100 - R_s$ » » stagionato;

la differenza $100 - R_r - (100 - R_s)$ sarà il magnetismo susseguente ed il suo percentuale sarà

$$(2) \qquad S' = 100 \frac{100 - R_r - (100 - R_s)}{100 - R_r} = 100 \frac{R_s - R_r}{100 - R_r}.$$

E siccome, per quanto abbiamo sopra detto, è:

$$S' = S$$

sarà pure

$$S = \frac{R_s - R_r}{100 - R_r} 100$$

da cui

$$(3) \qquad R_s - R_r = \frac{100 - R_r}{100} S = (100 - R_r) \frac{I_r - I_s}{I_r}$$

Le formule (1) e (2) servirebbero rispettivamente a calcolare il M. S. dalle variazioni di suscettività o da quelle del magnetismo residuo, e la (3) a calcolare la variazione che subisce il magnetismo residuo per causa della stagionatura in base alla corrispondente variazione della intensità magnetica.

Dalla (3) si deduce la

$$(4) \qquad I_r - I_s = \frac{R_s - R_r}{100 - R_r} I_r$$

che serve invece a calcolare le variazioni di intensità magnetica in base alle corrispondenti variazioni di magnetismo residuo.

Nella tabella V *a* è applicata la (1) ai tre campioni stagionati al massimo, pel campo $H = 0{,}3$ pel quale si conoscono dalla tabella III i valori di I_r, I_s e di $S = M S \%$.

TABELLA V *a*.

Calcolo del M. S. in base alle variazioni della intensità magnetica.

	I_r	I_s	S = M S °/₀	
			calcolato	osservato
Best	9,1	1,6	83	41
Svedese	7,1	2,1	70	31
Germania	8,0	3,2	60	36

Si vede che per spiegare la diminuzione di intensità magnetica in base alla semplice perdita del M. S. dovrebbe, questo avere un valore più elevato di quello constatato esperimentalmente; quindi si deve ammettere che, almeno nei campi di debole intensità, altra causa, oltre la perdita del M. S. influisca sulla diminuzione di suscettività prodotta dalla stagionatura.

La stessa formula applicata al campo H = 6 dà i seguenti risultati:

TABELLA V *b*.

Calcolo del M. S. di magnetizzazione nel campo H = 6 in base alle variazioni di intensità magnetica.

	I_r	I_s	S = M S °/₀ calcolato
Best	482	236	51
Svedese	512	340	33
Germania	514	447	13

Vediamo che, in questo campo più intenso, i valori calcolati pel M. S. riescono minori di quelli calcolati pel campo più debole, il che è conforme al fatto esperimentale constatato nella nota I che all' aumentare della intensità del campo diminuisce il M. S.

Qui non è possibile riconoscere quanto i valori così calcolati pel M. S. °/₀ concordino con quelli veri, poichè mancano

le determinazioni dirette del M. S. in questo campo; però, siccome per tale campo fu determinato il M. R., si può applicare tanto la formula (2) per determinare il magnetismo susseguente di demagnetizzazione, S', quanto la (3) per calcolare il magnetismo residuo del ferro stagionato R_s.

Applicando la (2) abbiamo:

TABELLA V *c*.

Calcolo del M. S. di demagnetizzazione in base alle variazioni del M. R. nel campo H = 6.

	R_r	R_s	S' = M S % calcolato
Best	19	55	45
Svedese	34	56	33
Germania	21	31	12

I valori calcolati per S' poco differiscono da quelli calcolati per S = M. S. % nella tabella V *b*; anche in questo caso adunque l'ipotesi soddisfa i risultati esperimentali poichè dà pel M. S. di demagnetizzazione e di magnetizzazione valori pressochè eguali.

Applicando finalmente la (3) abbiamo:

TABELLA V *d*.

Variazioni del magnetismo residuo dedotte da quelle della intensità magnetica nel campo H = 6.

	R_r	S Tab. V *b*	$R_s - R_r$ % calcolato	$R_s - R_r$ % osservato
Best	19	51	41	36
Svedese	34	33	22	22
Germania	21	13	10	10

In modo analogo si potrebbero invece calcolare colla (4) le variazioni della intensità magnetica deducendole da quelle del magnetismo residuo, e tale calcolo, non essendo che una inversione di quello esposto nella tabella V *d*, darebbe come quest' ultimo dei valori concordanti con quelli osservati.

In conclusione diremo che la diminuzione che subisce il M. S. del ferro colla stagionatura può servire a spiegare il senso, ed in gran parte anche il valore, delle variazioni che contemporaneamente hanno luogo nella suscettività e nel M. R. Per tutti tre i campioni studiati, le verifiche quantitative fatte pel campo H = 6 riuscirono quasi perfette, ma quelle pel campo debole H = 0,3 dimostrarono che le diminuzioni osservate nella suscettività non sono che parzialmente giustificate dalla corrispondente diminuzione del M. S.

8. **Stagionatura a 62° del ferro stagionato a 131°.** — Possedendo ora i tre campioni stagionati al maximum, presentanti cioè il minimo di suscettività ed il massimo di M. R. si deve, allo scopo indicato alla fine del § 1, sottoporli ad una stagionatura a temperatura più bassa, per constatare se la suscettività aumenti ed il M. R. diminuisca, per raggiungere i valori presentati dai campioni stessi dopo la stagionatura normale a tale temperatura.

La scelta della nuova temperatura di stagionatura deve farsi fra quelle di 100°, 80°, 62°, 46° e temp^a. ordinaria, alle quali erano state eseguite le stagionature precedenti. Le più elevate fra queste temperature sono da escludersi perchè sarebbero troppo piccole ed incerte le differenze da constatarsi nella suscettività e nel M. R.; le più basse pure da escludersi per la lentezza colla quale avverrebbero le variazioni (alla temperatura ordinaria occorrerebbero degli anni per constatarle) scelsi perciò la temperatura di 62° la quale, come centrale fra esse, evita meglio i due inconvenienti.

La nuova stagionatura durò in tutto 28 giorni, con sette riprese successive di 2, 4, 4, 4, 4, 5 e 5 giorni, dopo ciascuna delle quali i campioni venivano, come il solito, raffreddati e sottoposti alla misura delle loro costanti magnetiche.

I risultati di tali misure sono registrati nella tabella VI.

Stagionatura a 62° dei campioni stagionati a 131°.

Il magnetismo susseguente è sempre insensibile.

TAB. VI	H	Stagionati a 131° Tab. III	Stagionatura a 62° per giorni							Stag^ra a 62° nel 1903
			2	6	10	14	18	23	28	
Best	0,1	I=0,45	0,5	0,5	0,45	0,45	0,45	0,45	0,4	—
	0,2	1,0	1,0	1,1	1,05	1,1	1,0	1,0	1,0	—
	0,25	1,3	1,3	1,3	1,3	1,25	1,3	1,3	1,25	2
	0,3	1,6	1,7	1,6	1,7	1,6	1,6	1,6	1,6	—
	0,5	3,0	2,8	2,7	3,0	2,75	2,8	2,8	2,8	4
	1,0	6,7	6,4	6,1	6,5	6,2	6,3	6,15	6,1	8
	1,5	12,0	11,5	11,0	11,3	11,1	11,1	11,0	11,1	16
	2,0	20	19	18	18	18	18	17,9	17,7	32
	3,0	50	46	44	43	42	42	41	42	81
	4,0	100	94	91	90	87	87	84	86	147
	5,0	166	157	154	153	148	147	143	145	222
	6,0	236	224	223	220	216	216	209	214	300
	M. R. %	55	57	58	59	59	59	59	59	46
Svedese	0,1	I=0,65	0,55	0,6	0,65	0,6	0,55	0,5	0,6	—
	0,2	1,3	1,2	1,2	1,25	1,2	1,1	1,1	1,2	—
	0,25	1,7	1,6	1,7	1,6	1,6	1,5	1,45	1,6	2
	0,3	2,1	2,1	2,15	2,0	1,9	1,9	1,9	2,0	—
	0,5	3,9	3,7	3,8	3,7	3,6	3,5	3,45	3,6	4
	1,0	9,5	9,3	9,2	8,9	8,9	8,6	8,6	8,8	10
	1,5	19,3	18,6	17,8	18,3	18,2	17,3	17,3	17,2	23
	2,0	35	34	31	32	32	31	30	29	44
	3,0	87	86	82	80	80	78	77	75	110
	4,0	167	164	159	154	154	152	150	150	195
	5,0	255	252	247	240	238	238	233	236	288
	6,0	340	335	330	324	322	321	318	316	380
	M. R. %	57	58	60	60	60	60	60	60	52
Germania	0,1	I=0,8	0,8	1,0	0,85	0,85	0,85	0,9	0,8	—
	0,2	1,7	1,8	1,9	1,7	1,7	1,7	1,8	1,7	—
	0,25	2,5	2,5	2,55	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3	—
	0,3	3,2	3,1	3,3	2,9	2,9	2,9	3,0	2,9	—
	0,5	6,4	6,3	6,7	6,2	6,0	5,9	6,0	5,9	—
	1,0	20	19,2	19,9	18,8	18,1	17,9	17,9	17,5	—
	1,5	42	42	41	41	38	38	37	37	—
	2,0	73	73	73	70	67	67	66	66	—
	3,0	164	166	160	154	155	155	154	149	—
	4,0	258	263	258	252	252	252	251	248	—
	5,0	351	355	355	347	346	346	346	342	—
	6,0	447	446	444	442	437	437	436	430	—
	M. R. %	30	32	32	32	34	33	34	34	—

Stagionatura a 62° dei campioni stagionati a 131°.

Valori percentuali dedotti dalla tabella VI.

TAB. VII	H	Stagion. a 131° Tab. III	Stagionatura a 62° per giorni 2	6	10	14	18	23	28	Stag^ra a 62° nel 1903
Best	0,1	100	101	101	100	100	100	100	89	—
	0,2	100	100	110	105	110	100	100	100	—
	0,25	100	100	100	100	96	100	100	96	154
	0,3	100	110	100	110	100	100	100	100	—
	0,5	100	93	90	100	92	93	93	93	134
	1,0	100	96	91	97	93	94	92	91	120
	1,5	100	96	92	94	93	93	92	93	133
	2,0	100	95	92	92	90	90	89	88	160
	3,0	100	92	88	86	84	84	82	84	162
	4,0	100	94	91	90	87	87	84	86	147
	5,0	100	95	93	92	89	89	86	87	134
	6,0	100	95	94	93	92	92	89	91	127
	M. R.	100	103	105	107	106	107	107	107	84
Svedese	0,1	100	85	92	100	92	85	77	92	—
	0,2	100	92	92	96	92	85	85	92	—
	0,25	100	94	100	94	94	88	85	94	117
	0,3	100	100	102	95	90	90	90	95	—
	0,5	100	95	97	95	92	90	88	92	103
	1,0	100	98	97	94	94	91	91	93	105
	1,5	100	96	92	95	94	90	90	89	119
	2,0	100	97	89	91	91	89	86	83	126
	3,0	100	99	94	92	92	90	89	86	126
	4,0	100	98	95	92	92	91	90	90	117
	5,0	100	99	97	94	93	93	91	93	113
	6,0	100	99	97	95	95	94	94	93	112
	M. R.	100	103	105	106	105	106	106	106	91
Germania	0,1	100	100	125	105	105	105	113	100	—
	0,2	100	106	112	100	100	100	106	100	—
	0,25	100	100	102	88	88	88	92	92	—
	0,3	100	97	103	91	91	91	94	91	—
	0,5	100	98	105	97	94	92	94	92	—
	1,0	100	96	100	94	90	89	89	87	—
	1,5	100	100	95	95	88	88	86	86	—
	2,0	100	100	100	96	92	92	90	90	—
	3,0	100	101	98	94	95	95	94	91	—
	4,0	100	102	100	98	98	98	97	96	—
	5,0	100	101	101	99	99	99	99	97	—
	6,0	100	100	99	99	98	98	98	96	—
	M. R.	100	106	106	106	110	109	110	110	—

Nella I colonna di ogni tabelletta figurano i valori, estratti dalla tabella III, delle intensità magnetiche che presentavano i campioni nei varii campi alla fine della stagionatura a 131°, e nell'ultima colonna i valori limiti raggiunti dai campioni Best e svedese per le stesse intensità magnetiche, nel 1903, dopo la stagionatura normale a 62° durata 22 giorni. Pel campione di Germania, come campione nuovo, manca quest'ultimo confronto.

Il M. S. non figura nella tabella VI perchè fu sempre insensibile.

La tabella VII contiene i risultati della VI ridotti a valori percentuali rispetto al valore che aveano inizialmente i singoli campioni stagionati a 131°.

Dall'esame di queste tabelle risulta che, quantunque la stagionatura a 131° precedente a queste esperienze avesse portato le intensità magnetiche a valori notevolmente inferiori ed il M. R. a valori superiori ai corrispondenti limiti raggiunti colla stagionatura normale a 62° del 1903, la successiva stagionatura a 62°, lungi dall'aumentare la suscettività e diminuire il M. R. in modo di riavvicinarli ai detti valori limiti, produsse delle ulteriori variazioni, lente ma sensibili, in senso opposto, così da allontanare maggiormente tanto le intensità magnetiche quanto il M. R. da quei valori.

Questi risultati depongono in favore della seconda fra le due interpretazioni formulate alla fine del § 1, quella cioè che ammette che, all'abbassarsi della temperatura, il ferro tenda ad un assettamento molecolare al quale compete una suscettività tanto più bassa ed un M. R. tanto più elevato quanto più bassa è la temperatura. Se all'atto pratico si riscontra che tale legge si inverte al di sotto di una certa temperatura, alla quale la suscettività raggiunge un minimum ed il M. R. un maximum, ciò dipende dal fatto che nelle stagionature a temperature più basse di quella, pei maggiori impedimenti agli spostamenti molecolari e fors' anche per altre ragioni, l'assettamento molecolare non solo non può raggiungere quello stato che a quelle temperature gli compete, ma neppure quello che avea potuto raggiungere ad una temperatura superiore.

Se adunque si vuole avvicinarsi al più presto e più completamente possibile alle condizioni caratteristiche alle temperature basse, sarà utile, come abbiamo fatto ora noi, stagionare dapprima a quella temperatura che determina le modificazioni più profonde, effettuando così in condizioni più favorevoli una parte del movimento molecolare che sarebbe troppo ostacolato alla temperatura più bassa, e continuare poi la stagionatura alla temperatura bassa, dalla quale si potrà attendersi un ulteriore avvicinamento alle condizioni caratteristiche di quest'ultima temperatura.

9. **Ricotture a temperature successivamente piú elevate.** — Come conseguenza delle conclusioni ora formulate risulterebbe come, giunto che sia il ferro allo stato di assettamento stabile ad una temperatura, sottoponendolo ad un elevamento di temperatura, la sua suscettività debba aumentare ed il M. R. diminuire, per raggiungere i valori che a tale temperatura sono proprî, e tali variazioni dovranno avvenire con relativa prontezza, essendo l' aumento di temperatura favorevole alla mobilità molecolare.

A verifica di tale illazione e delle conclusioni da cui deriva, eseguii sopra i tre campioni un' ultima serie di esperienze sottoponendoli, nello stato in cui si trovavano alla fine delle esperienze sopra riferite, a delle ricotture frazionate a temperature man mano crescenti.

In queste esperienze, oltre al ricupero della suscettività ed alla diminuzione del M. R. era da attendersi di assistere, in uno stadio o nell' altro delle ricotture, alla ricomparsa del M. S. che si era reso insensibile fin da quando i campioni erano stati stagionati per oltre sette ore a 131° (V. tab. III).

Come temperature di ricottura scelsi quelle stesse che mi erano servite per le stagionature normali del 1903, cioè sottoposi i campioni stagionati a 62° quali si trovavano al termine delle esperienze della tabella VI, a successive ricotture, prima a 131°, poi a 159°, a 180°, a 360° e finalmente ad una ricottura al calor rosso.

Nella tabella VIII sono riassunti i valori delle intensità magnetiche, del M. R. e del M. S. determinati nel solito modo dopo i singoli stadî delle ricotture.

TAB. VIII. **Ricotture success. a temp. crescenti dei campioni stagionati a 62°**

H	Stagion. finale a 62° Tab. VI	Temperature e durate delle ricotture												Calor rosso 1 ora
		131°		159°			180°			360°				
		Ore		Ore			Ore			Ore				
		10	34	8	14	40	4	18	46	4	16	40	64	
							Best							
0,25	I=1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,7	1,3	3,8	3,8	5,1	4,6	6,1
0,50	2,8	2,9	2,9	2,9	3,1	3,8	3,0	3,8	3,2	10,6	10,6	12,4	12,2	15,0
1,0	6,1	6,7	6,6	6,9	7,6	6,9	7,5	9,6	7,7	30	30	30	30	39
1,5	11,1	12,4	12,4	12,4	14,4	12,7	15,0	19,5	15,1	56	56	57	57	72
2,0	17,7	21,0	20,5	20,8	25,7	22,5	26	36	26	93	92	94	94	112
3,0	42	51	51	50	67	58	67	89	68	184	177	179	179	204
4,0	86	104	102	102	131	120	134	162	134	272	262	265	262	294
5,0	145	170	171	168	206	190	210	241	210	362	347	346	344	384
6,0	214	240	242	238	282	267	283	322	287	451	429	428	425	475
M. R. %	59	55	56	56	52	54	51	44	50	24	24	24	24	19
M. S. %	0	0	0	0	0	0	0	tracce	tracce	11	13	15	17	37
							Svedese							
0,25	I=1,6	1,5	1,7	1,7	1,8	1,8	2,1	2,4	2,4	3,8	3,5	4,0	4,7	5,7
0,5	3,6	3,6	3,9	4,0	4,5	4,6	5,0	5,4	5,1	8,9	8,9	9,9	10,5	12,8
1,0	8,8	9,5	9,6	9,9	12,7	12,8	14,2	14,8	13,2	23	24	25	26	32
1,5	17,2	20,3	20,3	20,7	28,1	27,5	29	30	27	44	44	47	49	58
2,0	29	36	36	38	51	51	53	52	46	74	74	78	80	95
3,0	75	88	92	93	121	123	128	125	114	158	161	165	166	192
4,0	150	168	175	175	210	211	222	221	205	256	260	262	264	292
5,0	236	254	262	263	298	298	312	320	302	352	352	354	357	392
6,0	316	341	348	348	384	384	401	412	390	446	438	444	445	488
M. R. %	60	57	56	56	50	50	50	48	50	41	40	40	40	35
M. S. %	0	0	0	0	0	0	tracce	1	1	4	7	6	8	23
							Germania							
0,25	I=2,3	2,3	2,6	2,2	2,4	2,4	3,1	2,2	2,9	4,3	3,8	4,2	4,5	5,9
0,5	5,9	6,4	6,9	6,2	7,0	6,9	7,5	6,2	6,5	10,1	10,2	11,1	11,8	14,9
1,0	17,5	19,9	20,4	20,1	23,1	20,8	23	19	19	28	29	29	29	38
1,5	37	44	44	44	47	44	45	40	40	56	55	56	58	70
2,0	66	75	73	74	82	78	78	72	72	89	90	89	93	112
3,0	149	162	164	166	178	170	171	160	158	187	185	179	184	214
4,0	248	258	266	264	276	266	272	258	251	282	280	272	278	310
5,0	342	354	358	357	370	361	366	354	347	378	373	363	368	406
6,0	430	448	447	448	464	455	460	448	441	475	464	450	457	501
M. R. %	34	31	31	31	29	30	30	32	34	27	26	25	25	20
M. S. %	0	0	0	0	0	0	1	0,5	0,5	6	8	9	11	34

Dall' osservazione di questi risultati si riconosce:

che, giusta le previsioni, le intensità magnetiche vanno aumentando all' elevarsi della temperatura di ricuocimento, avvicinandosi al valore massimo che assumono colla ricottura al calor rosso, e raggiungono per la ricottura a 360°, un valore già di poco inferiore a quel massimo:

che il magnetismo residuo subisce contemporaneamente una diminuzione, ed esso pure, per la ricottura a 360° si riduce ad un valore che supera di poco il valore minimo che raggiunge colla ricottura normale al calor rosso:

che il M. S. incomincia a rendersi appena sensibile colla ricottura a 180°, e, dopo la ricottura a 360°, si trova ancora molto discosto dal valore massimo che raggiunge colla ricottura al calor rosso.

Osserveremo inoltre che le variazioni prodotte dalle ricotture sono meno regolari di quelle prodotte dalle stagionature, così che, coll' aumentare della durata della ricottura, si hanno spesso delle variazioni in senso opposto a quelle prima avute alla temperatura stessa. Maggiore regolarità si ha nella ricottura a 360°, nella quale le variazioni più forti si verificano nelle prime ore di ricottura, per poi intensificarsi leggermente, specialmente nei campi deboli, col progredire della durata della ricottura.

Il M. S., che alla temperatura di 360° è in pieno sviluppo, aumenta regolarmente colla durata della ricottura, seguendo, come sempre, le sorti della suscettività dei campi deboli ai quali si riferisce, mentre il M. R., che si riferisce ai campi più elevati, risente della maggior costanza che in tali campi presenta la suscettività.

10. **Confronto fra campioni stagionati o ricotti alla stessa temperatura.** — Sarà ora utile confrontare gli stati magnetici finali raggiunti nelle ultime ricotture frazionate con quelli raggiunti colle stagionature normali alle temperature stesse, e poter così giudicare se vi sia o no identità fra essi.

A tale scopo serve la tabella IX nella quale sono messe a confronto le condizioni dei campioni alla fine delle ricotture del 1905, estratte dalla tabella VIII, con quelle dei campioni stessi alla fine delle singole stagionature normali eseguite

nel 1903; solo per la stagionatura a 131°, in luogo dei valori ottenuti nel 1903 si esposero quelli più recenti del 1905, estratti dalla tabella III.

Nella prima colonna dei risultati figurano le condizioni magnetiche iniziali dei campioni al principio delle ricotture, i quali si trovavano, come si disse, nelle condizioni finali delle esperienze della tabella VI, cioè stagionati al massimo a 62°.

TAB. IX. **Confronto fra i risultati delle ricotture (1905)** (Tab. VIII). **e delle stagionature (1903)** (Tab. I) **a temperature eguali.**

H	Temperature ed epoche delle ricotture o stagionature										
	62°	131°		159°		180°		360°		Calor rosso	
	Stag. 1905	Ric. 1905	Stag. 1905	Ric. 1905	Stag. 1903	Ric. 1905	Stag. 1903	Ric. 1905	Stag. 1903	Ricotture 1905	1903
						Best					
0,25	I=1,2	1,2	1,3	1,2	2	1,3	4	4,6	8	6,1	8
0,5	2,8	2,9	3,0	2,8	4	3,2	10	12,2	16	15,0	18
1,0	6,1	6,6	6,7	6,9	10	7,7	24	30	36	39	43
1,5	11,1	12,4	12	12,7	22	15,1	44	57	70	72	79
2,0	17,7	20,5	20	22,5	38	26	69	94	109	112	120
3,0	42	51	50	58	87	68	136	179	188	204	212
4,0	86	102	100	120	163	134	227	262	268	294	298
5,0	145	171	166	190	241	210	326	344	352	380	400
6,0	214	242	236	267	332	287	417	425	438	475	477
M. R. °/₀	59	56	56	54	48	50	35	24	20	19	18
						Svedese					
0,25	I=1,6	1.7	1.7	1,8	2	2,4	2	4.7	4	5,7	6
0,5	3,6	3.9	3,9	4.6	7	5.1	7	10.5	8	12.8	13
1,0	8.8	9.6	9.5	12,8	16	13.2	16	26,2	25	32	30
1,5	17.2	20.3	19,3	27,5	31	26,7	32	49	45	58	59
2,0	29	36	35	51	50	46	53	80	78	95	98
3,0	75	92	87	123	119	114	119	166	166	192	195
4,0	150	175	167	211	211	205	210	264	267	292	292
5,0	236	262	255	298	309	302	315	357	371	392	407
6,0	316	348	340	384	402	390	417	445	465	488	498
M. R. °/₀	60	56	57	50	55	50	52	40	41	35	36
						Germania					
0,25	I=2,3	2,6	2,5	2,4	—	2,9	—	4,5	—	5,9	—
0,5	5,9	6,9	6,4	6,9	—	6,5	—	11,8	—	14,9	—
1,0	17,5	20,4	20	20,8	—	18,6	—	29	—	38	—
1,5	37	44	42	44	—	40	—	58	—	70	—
2,0	66	73	73	78	—	72	—	93	—	112	—
3,0	149	164	164	170	—	158	—	184	—	214	—
4,0	248	266	258	266	—	251	—	278	—	310	—
5,0	342	358	351	361	—	347	—	368	—	406	—
6,0	430	447	467	455	—	441	—	457	—	500	—
M. R. °/₀	34	31	30	30	—	34	—	25	—	21	—

Si rammenterà che alla stagionatura a 131° del 1905 sussegui una lunga stagionatura a 62°, (Tab. VI) durante la quale le costanti magnetiche subirono ancora una debole variazione nel senso di accentuare quella già prodotta dalla stagionatura a 131°. La tabella IX rende manifesto che i campioni così modificati, riportati alla temperatura di 131° subiscono in breve tempo una modificazione in senso inverso a quella ultima subita, che li riporta sensibilmente alle condizioni in cui si trovavano alla fine della stagionatura a 131°.

Questo fatto è interessante come conferma di quanto si è concluso alla fine del § 8, esser cioè, lo stato che tende ad assumere il ferro colla stagionatura a 62°, realmente tale da competergli una minore suscettività ed un maggior M. R. che a 131°; si vede infatti che, riportandolo di poi alla temperatura di 131°, svaniscono tanto la diminuzione della suscettività quanto l'aumento del magnetismo residuo subiti durante la stagionatura frazionata a 62° della tabella VI, eliminando così ogni dubbio che quelle variazioni fossero solo accidentali.

Se confrontiamo poi, anche per le altre temperature, lo stato finale raggiunto colla ricottura frazionata con quello raggiunto colla stagionatura normale alla temperatura stessa, si riconosce che i due stati, nel ferro svedese, sono pressochè identici; per questa qualità di ferro esiste quindi, per ogni singola temperatura una condizione stabile, che esso raggiunge lentamente col tempo, indipendentemente dalle condizioni iniziali in cui si trovava. Al contrario nel ferro Best, per quanto subisca da una ricottura all'altra delle variazioni nel senso di rendere minore la differenza fra i due stati finali, questa differenza è, specialmente per le temperature di 159° e di 180°, considerevole, presentando, il campione stagionato normalmente, suscettività molto più elevate e magnetismo residuo più basso dello stesso campione ricotto alla stessa temperatura.

Io ritengo però che, anche per questa qualità di ferro, esista per ogni singola temperatura una condizione di stabilità, per quanto meno persistente che nel ferro svedese, e che tale sia quella che si raggiunge colla ricottura. Durante la stagionatura normale, il campione si avvicina a tale con-

dizione di stabilità ma è sempre lontano dal raggiungerla in causa, pare, dell' intervento di azioni che producono effetti opposti a quelli ordinariamente prodotti dalla stagionatura; dell' intervento di tali azioni si ebbe sentore anche durante il processo di stagionatura alle temperature di 159° e di 180° eseguite nel 1903, avendo il detto campione, col progredire della stagionatura (Vedi nota III: tabelle II e III e tavola II) ricuperato in parte la suscettività che avea perduta nei primi stadî delle stagionature stesse.

A temperatura più elevata (360°) i due stati definitivi che assume colla stagionatura normale e colla ricottura, sono, anche pel ferro Best, quasi identici.

Pel ferro di Germania tali confronti non si possono eseguire non essendo stato sottoposto alle stagionature normali del 1903.

11. **Il M. S. e le altre proprietà magnetiche.** — Per quanto riguarda il M. S. abbiamo assistito alla sua scomparsa ad un certo stadio della stagionatura (tab. III) ed alla sua ricomparsa ad un certo stadio della ricottura (tab. VIII).

È interessante il ricercare, anche in appoggio delle relazioni discusse nel § 7 fra il M. S. e le altre proprietà magnetiche, se negli stati caratterizzati da eguali valori del M. S., corrispondano valori eguali anche per le altre qualità magnetiche.

Non presentando le due serie di esperienze valori identici del M. S. non potremo fare questo confronto che in modo approssimativo. Nella tabella X sono confrontate: la determinazione in cui comparvero nella ricottura le prime tracce di M. S. (V. tab. VIII) con quella nella quale si presentarono le ultime tracce di M. S. durante la stagionatura (V. tab. III); e nella tabella XI sono confrontate: la determinazione in cui il M. S. raggiunse il massimo valore nella ricottura a 360°, (tab. VIII) con la determinazione di stagionatura (tab. III) in cui il M. S. presenta i valori più prossimi a quel massimo.

TAB. X.

Proprietà magnetiche alla scomparsa e ricomparsa del magnetismo susseguente.

H	*Best*		*Svedese*		*Germania*	
	Stagionato	Ricotto	Stagionato	Ricotto	Stagionato	Ricotto
	a 131° per ore	a 180° per ore	a 131° per ore	a 180° per ore	a 131° per ore	a 160° per ore
	7	46	7	46	15	4
	Tabella III	Tabella VIII	Tabella III	Tabella VIII	Tabella III	Tabella VIII
0,25	I=1,3	1,3	1,7	2,4	3,3	3,1
0,5	3,2	3,2	4,6	5,1	8,2	7,5
1,0	7,5	7,7	12,4	13,2	24	23
1,5	14	15	26,5	27	50	45
2,0	24	26	46	46	83	78
3,0	58	68	112	114	174	171
4,0	117	134	196	205	272	272
5,0	189	210	285	302	366	366
M. R. %	53	50	52	50	29	30
M. S. %	2	tracce	3	1	3	1

TAB. XI.

Proprietà magnetiche nella stagionatura e nella ricottura a pari valori del magnetismo susseguente.

H	*Best*		*Svedese*		*Germania*	
	Stagionato	Ricotto	Stagionato	Ricotto	Stagionato	Ricotto
	a 131° per ore	a 360° per ore	a 131° per ore	a 360° per ore	a 131° per ore	a 360° per ore
	1	64	3	64	7	64
	Tabella III	Tabella VIII	Tabella III	Tabella VIII	Tabella III	Tabella VIII
0,25	3,9	4,6	3,2	4,7	3,3	4,5
0,5	9,7	12,2	7,3	10,5	9,2	11,8
1,0	29	30	21	26	28	29
1,5	54	57	43	49	57	58
2,0	90	94	73	80	94	93
3,0	174	179	156	166	189	184
4,0	260	262	252	264	285	278
5,0	346	344	345	357	380	368
M. R. %	25	24	43	40	26	25
M. S. %	22	17	10	8	12	11

La tabella X rende manifesto che la suscettività magnetica ed il M. R. hanno, al momento in cui sta per scomparire il M. S. col procedere della stagionatura, sensibilmente lo stesso valore che al momento in cui ricompaiono, durante la ricottura, le prime tracce del M. S.; e la tabella XI dimostra che, similmente, negli altri stadi di ricottura e di stagionatura, a valori pressochè uguali del M. S. corrispondono pure valori pressochè eguali della suscettività e del magnetismo residuo (nonchè della forza coercitiva e dell' isteresi, le quali, per quanto si è veduto nella nota III, variano parallelamente col M. R.).

Si può quindi ritenere che una causa unica (probabilmente una variazione di struttura molecolare) determini le variazioni che si riscontrano in tutte le dette proprietà magnetiche, per modo che per un dato campione, ad un determinato valore di una di esse proprietà corrispondano valori determinati di tutte le altre.

12. **Applicazione della teoria molecolare del magnetismo.** — La conoscenza più perfetta dei fenomeni determinati dalla stagionatura magnetica del ferro acquistata colle ricerche che fanno oggetto di questa nota, mi pare permetta di penetrare, un po' più profondamente di quanto si abbia potuto far prima, nella indagine della natura dei fenomeni stessi, collegandoli alla teoria molecolare del magnetismo, ormai generalmente accettata.

Alla fine della nota III, a conclusione dei fatti fino allora constatati, dimostrai che si potevano considerare come casi particolari di un unico fenomeno che denominai « isteresi termomagnetica » il quale consiste in ciò che il ferro, portato ad alta temperatura e successivamente ad una temperatura più bassa, ritarda a prendere le qualità magnetiche che gli spetterebbero a tale temperatura, e le sue costanti magnetiche restano perciò alterate verso il valore che aveano alla temperatura più elevata.

Così, siccome alla temperatura del rosso la suscettività è più elevata, ed il M. R., la forza coercitiva e l' isteresi minori che a temperature basse, il ferro ricotto al rosso presenta, dopo raffreddato, più alta suscettività, e M. R., forza coercitiva

ed isteresi minori del valore che loro compete alla bassa temperatura. A queste qualità magnetiche possiamo, in base alle presenti ricerche, aggiungere il M. S., il cui alto valore nel ferro di recente ricotto indica, per analogia, che alla temperatura del calor rosso il magnetismo susseguente deve essere molto elevato.

In causa del detto ritardo, perchè il ferro assuma ad una data temperatura le qualità magnetiche che gli competono, deve rimanere a tale temperatura (stagionarsi) per un tempo tanto più lungo quanto più questa temperatura è bassa; tempo che varia: da poche ore per le temperature di 360° e 180°, a giorni e mesi per le temperature sempre più basse fino a giungere ad anni nelle stagionature effettuate alla temperatura ordinaria.

Durante la stagionatura vediamo, quindi, mano mano diminuire la suscettività ed il magnetismo susseguente ed aumentare il M. R. la forza coercitiva e l'isteresi, fino ad un limite che dipende dalla temperatura alla quale la stagionatura ha luogo.

Se il ferro stagionato a caldo si porta alla temperatura ordinaria, il fenomeno della isteresi termomagnetica ha ancora luogo; il campione cioè presenta dapprincipio di poco alterate le qualità magnetiche che aveva a caldo dopo stagionato, ma poi, lentissimamente, la suscettività ed il M. S. subiscono una nuova diminuzione e le altre costanti magnetiche un nuovo aumento, fino ad un limite che pare raggiunto dopo tre o quattro anni.

Ammettendo l'esistenza dell'isteresi termomagnetica, si possono adunque ricondurre ad un principio unico tutte le variazioni che si osservano nelle qualità magnetiche del ferro durante la stagionatura a temperature differenti, ma restiamo tuttavia all'oscuro riguardo alla intima natura dei fenomeni ai quali sono dovute quelle variazioni.

Mi pare che la teoria molecolare del magnetismo suggerisca un'ipotesi che dà di questi fenomeni una spiegazione meccanica accettabile.

L'ipotesi consisterebbe nel supporre che i magneti molecolari, ammessi da detta teoria, si trovino, quando il ferro è a temperatura molto alta, disposti caoticamente e che così

rimangano anche immediatamente dopo il raffreddamento del ferro. In seguito però, per l'attrazione reciproca dei poli opposti, le calamite elementari andrebbero smovendosi dalle posizioni accidentali prima acquistate, tendendo a costituire gruppi o catene molecolari chiuse, in cui ciascun polo di una molecola ha dappresso il polo contrario di un'altra molecola.

Questo lento moto di aggruppamento molecolare costituirebbe appunto la stagionatura.

L'aggruppamento più semplice sarebbe quello a triangolo della fig. 1 ma ogni altro poligono può dare altre forme possibili.

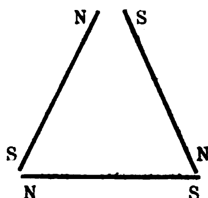


Fig. 1.

Qualunque sia l'aggruppamento molecolare preesistente alla ricottura al calor rosso, esso deve venir distrutto dai violenti moti molecolari inerenti a quella temperatura elevata, (i quali moti furono già invocati nella teoria molecolare del magnetismo [1]) per spiegare la diminuzione di suscettività a temperature molto elevate e la perdita totale di magnetismo che ha luogo quando quei moti divengono tanto violenti da determinare la rotazione continua delle molecole) e perciò tale ricottura distruggerà ogni effetto di precedenti stagionature.

Portando a temperatura più bassa il campione ricotto al rosso. le calamite elementari rimarranno pressochè immobilizzate nelle posizioni accidentali nelle quali furono sorprese nel raffreddamento, e, per la legge dei grandi numeri, non prevarrà in esse alcuna orientazione speciale (prescindendo dalla debole influenza che può avervi il magnetismo terrestre) ed il campione riuscirà scalamitato e colle molecole disposte nel modo caotico sopra ammesso.

1) Vedi Ewing. Magnetische Induktion, Berlin 1892, pag. 308.

In queste condizioni le azioni reciproche delle calamite elementari sono al minimo, e quindi una debole forza magnetica produrrà un orientamento molecolare ragguardevole, ed il campione presenterà, quella suscettività relativamente elevata che si constata esperimentalmente nei campioni di recente ricotti. Le molecole, orientandosi facilmente, si disorientano anche facilmente al cessare della forza magnetizzante, e da ciò i piccoli valori, osservati in tali condizioni, del M. R., della forza coercitiva ed, in conseguenza, dell' isteresi.

Sotto l' azione del campo magnetico, l' orientamento delle prime molecole, che accidentalmente si trovano più libere delle altre, modifica l' equilibrio molecolare preesistente, per cui si possono successivamente orientare altre molecole diventate più libere, e dopo queste altre, per cui deve trascorrere un tempo apprezzabile prima che cessi il moto di orientamento, e si avrà quindi un elevato magnetismo susseguente.

Ma, rimanendo il campione per molto tempo a quella temperatura, a poco a poco le attrazioni reciproche dei poli opposti devono modificare la disposizione caotica primitiva, tendendo a produrre nelle molecole degli spostamenti angolari, e forse anche degli spostamenti lineari atti a riavvicinare i poli di nome opposto, e così si andranno a poco a poco formandosi quelle catene molecolari chiuse la cui formazione, secondo la nostra ipotesi, costituisce il meccanismo del fenomeno della stagionatura.

Nei gruppi cosi formati occorrerà maggiore sforzo, da parte di un campo magnetizzante, per ottenere le rotazioni molecolari che determinano la calamitazione, poichè gli spostamenti angolari dei poli sono ostacolati dalle attrazioni dei poli opposti delle molecole adiacenti, così che, per ottenere eguali rotazioni e quindi eguali intensità magnetiche, occorrerà un campo più intenso, e la suscettività ne resterà diminuita. E dovrà pure diminuire il M. S. perchè ogni molecola, nei suoi spostamenti angolari, trascina nel suo movimento i poli delle molecole adiacenti collegati ai suoi per forza attrattiva, e perciò il movimento di tutte le molecole d' un gruppo sarà quasi istantaneo.

In armonia colla nostra ipotesi è pure il fatto sperimentale, che le diminuzioni di suscettività prodotte dalla stagionatura vanno diminuendo coll' aumentare della intensità del campo, fino a rendersi insensibili per campi alquanto più elevati di quello cui compete il massimo di suscettività; infatti, nella teoria molecolare del magnetismo si ammette che, sotto l' influenza di un campo sufficientemente intenso, le molecole incomincino a fare delle rotazioni angolari assai ampie, in modo di disporre gli assi magnetici delle loro molecole, pressochè paralleli e cospiranti colla direzione del campo magnetizzante. Quando un gruppo di magneti elementari ha subito questa rotazione, si trova nelle identiche condizioni tanto che appartenga a ferro stagionato che a ferro ricotto di recente, non esistendo più presso ciascun polo l' azione antagonista di un polo opposto. Perciò da quel momento la suscettività di quel gruppo sarà la stessa nei due casi; e siccome aumentando l' intensità del campo aumenta il numero dei gruppi orientati in detto modo, andrà, all' aumentare di essa, diminuendo la differenza fra la suscettività del ferro ricotto e del ferro stagionato, finchè le due suscettività riusciranno sensibilmente eguali nei campi elevati, in quelli cioè in cui la massima parte delle rotazioni molecolari sono già effettuate.

È naturale poi che ciò debba aver luogo, come risulta dall' esperimento, per campi di intensità alquanto maggiore di quella corrispondente al massimo di suscettività, poichè il massimo di suscettività ha luogo appunto per quel campo che determina il massimo numero di rotazioni molecolari. Questo campo dovrebbe aumentare di intensità coll' aumentare della compattezza degli aggruppamenti molecolari, e l' esperienza ha infatti dimostrato (Vedi nota III pag. 406) che colla stagionatura aumenta la intensità del campo di suscettività massima.

L' aumento della intensità del campo nel quale avvengono le rotazioni molecolari nel ferro stagionato, porta di conseguenza, giusta i principi della teoria molecolare del magnetismo, l' aumento che si osserva nel magnetismo residuo e quindi quelli della forza coercitiva e dell' isteresi.

Le nuove ricerche descritte in questa nota rendono anche facile lo spiegare, in base alle fatte ipotesi, i differenti effetti che si hanno dalla stagionatura a seconda della temperatura alla quale viene praticata.

All' uopo osserveremo, come la compattezza dei gruppi molecolari che abbiamo supposto formarsi per la stagionatura si debba ritener maggiore alle temperature più basse:

I. perchè le molecole sono più vicine e quindi più intense le reciproche attrazioni dei poli opposti;

II. perchè a temperature basse sono meno intense le vibrazioni molecolari termiche, le quali devono necessariamente aver per effetto di affievolire la compattezza dei gruppi molecolari.

Alle temperature elevate gli aggruppamenti, grazie alla notevole mobilità molecolare, si possono formare abbastanza rapidamente, ma, in causa della debolezza dei loro legami, la loro formazione poco influirà sul valore delle costanti magnetiche; invece alle temperature più basse, la diminuita mobilità molecolare, ritarderà bensì la formazione dei gruppi, ma, in causa della maggior compattezza di essi, la loro formazione produrrà una variazione più profonda nelle costanti magnetiche.

Ciò è appunto quanto si verificò esperimentalmente, essendosi notato che coll' abbassarsi della temperatura le variazioni prodotte dalla stagionatura nelle costanti magnetiche, si compiono in tempo più lungo, ma sono più profonde.

All' atto pratico però, se si stagiona il ferro nel modo normale, si trova che questo aumento nella intensità della stagionatura non ha luogo che fino a circa 131°, poichè a temperature inferiori le variazioni vanno facendosi sempre più deboli coll' abbassarsi della temperatura.

Questa inversione nell' andamento del fenomeno si può giustificare considerando che all' abbassarsi della temperatura la mobilità molecolare diminuisce e perciò le molecole obbediscono sempre più difficilmente alle attrazioni interne tendenti a formare quei gruppi molecolari che, secondo la nostra ipotesi, costituiscono la struttura del ferro stagionato. E le esperienze descritte in questa nota, danno a questa giustificazione

una base esperimentale, essendosi con esse dimostrato che le variazioni massime ottenute stagionando il ferro a 131° ricevono un incremento da una successiva stagionatura a temperatura anche molto più bassa. Ciò indica che si può ottenere, anche al di sotto di 131°, una stagionatura tanto più intensa quanto più bassa è la temperatura raggiunta purchè, invece di stagionare direttamente a bassa temperatura il ferro ricotto, lo si stagioni frazionatamente a temperature successivamente più basse.

Resterebbe a spiegare, colla ipotesi da noi fatta, il comportamento del ferro stagionato a bassa temperatura quando vien ricotto a temperature successivamente più elevate.

Le esperienze del § 9 hanno dimostrato che in tal caso le qualità magnetiche subiscono delle variazioni in senso inverso a quelle causate dalla stagionatura ordinaria, cioè nel senso di portare il campione alle condizioni in cui si troverebbe se fosse stato stagionato normalmente alla temperatura elevata alla quale ha luogo la ricottura. Però talvolta avviene (col ferro Best) che tali variazioni non sieno abbastanza intense da portarlo a quel punto, per cui il ferro presenta alla fine della ricottura una stagionatura più intensa di quella che avrebbe assunto direttamente a quella temperatura.

Si può rendere ragione del fatto considerando che alle temperature basse compete una stagionatura più intensa, cioè aggruppamenti molecolari più solidi che alle temperature più elevate. Ricuocendo alle temperature elevate, gli aggruppamenti perdono alquanto della loro compattezza, in causa della dilatazione e della maggiore intensità delle vibrazioni molecolari; ma i gruppi molecolari non perdono quella maggior intimità acquistata colla stagionatura a temperatura più bassa e perciò il campione può conservare un grado di stagionatura più elevato di quello che avrebbe raggiunto colla stagionatura normale alla temperatura stessa.

A conferma di tale interpretazione sta anche il fatto osservato che le variazioni prodotte dalla ricottura si compiono più rapidamente di quelle prodotte dalle stagionature; le prime, come causate dalla dilatazione termica e dall'aumento di vibrazione molecolare, possono far risentire i loro effetti

anche immediatamente, mentre le seconde esigono un processo di orientazione molecolare ostacolato dagli attriti interni e quindi lento ad effettuarsi.

12. **Conclusioni**. — La ricottura al calor rosso porta rapidamente il ferro ad uno stato ben definito rispetto alle sue qualità magnetiche, e caratterizzato: da una elevata suscettività ed elevato magnetismo susseguente, e da magnetismo residuo, forza coercitiva ed isteresi relativamente deboli.

Questo stato però è effimero, destinato cioè a trasformarsi spontaneamente col tempo in quello stabile di ferro stagionato, che deve perciò considerarsi come lo stato normale del ferro.

In questa trasformazione le dette proprietà magnetiche subiscono, di conserva, delle modificazioni profonde; la suscettività, pur rimanendo inalterata nei campi intensi, scema fortemente, fino ad un certo limite, nei campi deboli; il magnetismo susseguente diminuisce esso pure fino a scomparire, al contrario crescono considerevolmente il magnetismo residuo, la forza coercitiva e l' isteresi.

Può dirsi che più intense sono queste variazioni più intensa è la stagionatura, e che, a gradi eguali di stagionatura dello stesso campione, corrispondono rispettivamente valori eguali di tutte le costanti.

L' intensità che può raggiungere la stagionatura aumenta coll' abbassarsi della temperatura alla quale essa si effettua, ma del pari aumenta il tempo necessario al suo compimento, il quale è di qualche ora alla temperatura di 360°, ed arriva a più anni quando la stagionatura si effettua alla temperatura ordinaria.

Se adunque preme di raggiungere una intensa stagionatura in breve tempo, conviene scegliere opportunamente la temperatura a cui effettuarla, e pare che la più opportuna sia verso i 131°, con la quale si raggiunge, in una diecina di ore, una stagionatura che di poco verrebbe aumentata, sia col prolungarla a quella temperatura, che facendola seguire da altra a temperatura più bassa.

Non è poi indifferente il modo col quale la stagionatura si effettua riguardo agli effetti finali di essa.

Se, ricotto il ferro, lo si stagiona successivamente a temperature sempre più basse, si osserva l'accennato continuo aumento della intensità della stagionatura coll'abbassarsi della temperatura; se invece si stagiona direttamente il ferro ricotto ad una temperatura inferiore ad un certo limite (100-131°), quanto più è bassa tale temperatura tanto meno intenso è il grado di stagionatura che si può raggiungere anche dopo un tempo molto lungo. Però si raggiunge sempre, anche alla temperatura ordinaria, un grado elevato di stagionatura, perciò i campioni di ferro che si acquistano dai fornitori sono, in generale, fortemente stagionati.

Se il ferro stagionato al maximum ad una temperatura viene ricotto ad una temperatura più elevata, la stagionatura rapidamente retrocede tendendo a portarsi a quel grado meno elevato che spetta alla nuova temperatura, quale cioè si otterrebbe stagionando a tale temperatura il campione ricotto. Può darsi però che il ricupero non sia perfetto (Best) e che dopo la ricottura il ferro presenti ancora un grado di stagionatura più intenso di quello che presenterebbe se fosse stagionato alla temperatura stessa. Ad ogni modo sembra accertato che per ogni temperatura vi sia uno stato, caratterizzato da determinati valori delle costanti magnetiche, che il campione raggiunge o tende raggiungere col tempo, indipendentemente dalle condizioni iniziali nelle quali esso si trovava.

A seconda della qualità del ferro sono più o meno intense le variazioni in esso prodotte dalla stagionatura. Fra i campioni studiati, il Best le soffre più intense; lo segue il ferro Svedese, poi il nuovo campione di Germania e le variazioni minime si ebbero coll'acciaio studiato, insieme ai due primi campioni, nella nota III. Le condizioni sono tali che le differenze fra i varii campioni sono relativamente piccole nello stato di ricottura, e durante la stagionatura vanno sempre più accentuandosi.

Cercando di sintetizzare i fatti studiati, si è veduto, che le variazioni magnetiche che accompagnano la stagionatura si possono considerare come conseguenze di un fenomeno più generale che denominai *isteresi termomagnetica,* che consiste-

rebbe nel fatto che il ferro, portato da una temperatura più alta ad una più bassa, ritarda ad acquistare completamente le qualità magnetiche che gli competono alla nuova temperatura, e presenta perciò le costanti magnetiche temporaneamente alterate nel senso del valore che presentavano alla temperatura elevata, finchè la stagionatura non le riporti lentamente al loro giusto valore. Così che, siccome a temperature elevate la suscettività ed il magnetismo susseguente sono maggiori, ed il magnetismo residuo, la forza coercitiva e l'isteresi minori che a temperature basse, il campione appena raffreddato presenta le prime due costanti con un valore maggiore, e le altre tre con uno minore di quelli che avrà dopo stagionato.

Si possono anche considerare tutte queste variazioni come conseguenze, per lo meno parziali, di una sola di esse, cioè della diminuzione e del finale annullamento che subisce colla stagionatura il magnetismo susseguente; infatti si è dimostrato che, ogni diminuzione di magnetismo susseguente porta come conseguenza una diminuzione nella suscettività ed un aumento del magnetismo residuo, con una relazione tanto intima da permettere di stabilire, ed in parte verificare, come infatti si è fatto, delle relazioni quantitative fra le variazioni che subiscono contemporaneamente queste costanti durante la stagionatura.

Se finalmente dai fatti osservati si volesse risalire alla loro probabile causa meccanica, si trova che essi ricevono una spiegazione accettabile dall'ipotesi che le calamite elementari costituenti, secondo la teoria molecolare del magnetismo, i corpi magnetici, si aggruppino durante la stagionatura in catene chiuse coi poli opposti riavvicinati, potendosi spiegare con tale ipotesi, in modo semplice, le variazioni che avvengono durante la stagionatura nelle costanti magnetiche, nonchè l'influenza che ha su tali variazioni la temperatura alla quale il ferro viene stagionato.

Istituto Fisico dell' Università di Sassari.
Maggio 1905.

INTORNO ALLE DIMENSIONI DELLE GRANDEZZE FISICHE,

del Dott. PAOLO ROSSI.

Appunti storico - critici.

Intorno alle dimensioni delle grandezze fisiche molti hanno scritto, alcuni accennando solo a qualche questione relativa ad esse, altri proponendo nuovi sistemi di misure, altri infine considerando i problemi che si presentano — specialmente in riguardo alle grandezze elettriche — da un punto di vista generale.

Siccome però i diversi autori pervennero a conseguenze che talvolta fra di loro mal si possono conciliare, così riesce alquanto malagevole il formarsi un concetto esatto dei risultati ai quali si può giungere, rendendosi necessario il consultare numerose pubblicazioni.

Mi son quindi proposto nella presente nota di esporre, con intendimenti oggettivi, lo stato odierno della questione, riguardo alle dimensioni, sia delle grandezze meccaniche, come della temperatura e delle grandezze elettriche e magnetiche, discutendo la proposta di rendere interi gli esponenti nelle formole dimensionali di quest' ultime e cercando inoltre di collegare la questione delle dimensioni della massa — da considerarsi come unità fondamentale provvisoria — con quella relativa alle dimensioni della quantità di elettricità, tenuto conto che le ricerche d' oggidì sulla natura dell' elettricità e sulla costituzione della materia tenderebbero a risolvere contemporaneamente le due questioni.

Quanto alla temperatura, che risulta di dimensioni nulle rispetto alle grandezze fondamentali meccaniche, ritengo necessario risolvere anzitutto il problema di una scala rigorosamente assoluta, se si vuole introdurla nelle formole dimensionali. Risulta infine, in tesi generale, che non è possibile, nello stato attuale della fisica, esprimere le dimensioni di tutte le grandezze fisiche, mediante le sole fondamentali della meccanica (lunghezza L, tempo T e massa M), qualora non si fac-

ciano speciali ipotesi. In particolare ciò si riferisce a quelle elettriche e magnetiche, per le quali, come mostrerò, bisogna assumere provvisoriamente almeno un' altra grandezza fondamentale, scegliendola fra quelle puramente elettriche e magnetiche quando si vogliano rigettare tutte le arbitrarie supposizioni.

I. — Massa.

In modo analogo, fra le grandezze meccaniche, si può ritenere come fondamentale provvisoria la massa e come grandezze veramente fondamentali solo lo spazio ed il tempo. Infatti non solo il concetto di *massa* non è primitivo ed irreducibile, ma non è nemmeno possibile dare una definizione di essa, indipendentemente da qualunque postulato fisico. Inoltre ponendo la massa fra le grandezze fondamentali si ottengono per la costante ϕ di gravitazione universale le dimensioni

$$[\phi] = L^3 T^{-2} M^{-1}$$

mentre la ragione con cui si assume un' altra grandezza fondamentale, oltre a quelle di spazio e di tempo, non è più valida di quella con cui altri potrebbe ammettere come costante assoluta, cioè di dimensioni nulle, quella relativa alla gravitazione universale [come nel sistema astronomico [1])], oppure assegnarle altre dimensioni in base ad ipotesi accreditate.

Mi fermo a considerare separatamente queste due vie che possono condurre ad un sistema assoluto di misure delle grandezze meccaniche, basato sopra due sole fondamentali (L, T).

Volendo seguire la prima, si suppone costante assoluta il rapporto fra due forze unitarie diversamente definite, cioè fra la forza che imprime alla massa unitaria l' accelerazione uno, e quella di attrazione newtoniana fra due masse unitarie alla distanza uno.

Analogamente è l' equivalente dinamico della caloria, rapporto fra due unità di energia, una costante assoluta.

1) A. Roiti. Elem. di Fisica. 4. ed., 1, p. 148-149. Firenze, Succ. Le Monnier. W. Thomson (Lord Kelvin). Conf. scientifiques et allocutions trad. p. P. Lugol, Paris, 1893. 2. Unitès electriques, p. 67.

Com' è noto in base a quell' ipotesi dovendo essere di dimensioni nulle il rapporto $\frac{M L T^{-2}}{M^2 L^{-2}}$ si ottiene per la massa

(I) $$[M] = L^3 T^{-2}$$

Questa formola dimensionale, quantunque non appartenga all' usuale sistema assoluto di misure, potrebbe appartenere ad un altro sistema ugualmente assoluto, onde essa ci avverte di non attribuire, in generale, a dette formole una portata maggiore di quella che effettivamente esse hanno. Mi spiego: due grandezze fisicamente identiche hanno, in uno stesso sistema di misure, identiche dimensioni, ma non possiamo in generale affermare che, reciprocamente, due grandezze aventi le medesime dimensioni, siano fisicamente uguali, perchè nell'esempio offerto dalla (I) non è ammissibile che la massa sia fisicamente uguale ad un insieme di lunghezze e di tempi. L'eguaglianza cioè ha luogo solamente fra i numeri che misurano le due grandezze, persistendo col mutare le unità di misura scelte.

Ho voluto incidentalmente fare questa osservazione per evitare già fin d'ora ogni possibile equivoco in proposito [1]).

Ora, tornando all'argomento, la (I) è basata sopra un'ipotesi, abbandonata la quale, rimane ancora da studiare un' altra via d' uscita.

Si supponga infatti per un momento che sottili e ripetute ricerche vengano a mettere seriamente in dubbio l' esattezza della nota legge di attrazione universale o l' unicità della costante che vi figura.

Faccio osservare che tale supposizione è tutt' altro che assurda, come lo dimostrano le ricerche sperimentali e teoriche fatte fin qui intorno a detta questione, e per la massima parte esaminate dal Drude [2]): A. Hall propose di sostituire nella formola del Newton al quadrato della distanza la potenza

1) Intorno alla logicità di questo modo di vedere cfr.:

J. Bertrand. Bulletin des sciences math. et astr. sur les unitès electrique, p. 72-85. — Id. Leçons sur la théorie math. de l' electr., Paris, 1890, Cap. 13.

A. T. Ravenshear. Proc. Phys. Soc., 18, p. 424-445, 1903.

R. J. Sowter. Ibid. p. 445-447; oppure Beiblätter zu d. Ann. d. Phys. 28, pag. 1220, 1904.

2) P. Drude. Ueber Fernewnkungen. Wied. Ann. 62, p. 1-49, 1897.

2,000 000 16 per spiegare lo spostarsi del perielio di Mercurio; Seeliger suppose allo stesso scopo che la legge delle forze fosse della forma

$$F = \frac{m\,m'}{r}\, e^{-\lambda r}$$

dove λ è una costante piccolissima. Neumann prende il potenziale di dette forze della forma

$$V = \frac{A \, . \, e^{-\alpha r}}{r} + \frac{B \, . \, e^{-\beta r}}{r} + \dots$$

dove A,B . . . sono costanti qualunque ad α, β . . . costanti positive.

Tisserand [1]) infine sostituisce alla legge di Newton una di quelle proposte da Gauss e da Weber in elettrodinamica, cioè:

$$F_G = f \frac{m\,m'}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{h^2} \left[2\,u^2 - 3 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \right\}$$

$$F_W = f \frac{m\,m'}{r^2} \left\{ 1 + \frac{1}{h^2} \left[2\,r \frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \right\} .$$

D' altra parte, tenuto conto della tendenza delle odierne vedute circa la costituzione della materia [2]), non va trascurato il fatto che la massa degli elettroni è di natura puramente o prevalentemente elettromagnetica, in quanto che questa massa sarebbe allora, come quella d' ogni materia costituita da elettroni, una grandezza *variabile* colla velocità [3]). Infatti, in seguito alle ricerche del Kaufmann [4]) sulla deviabilità elettrica e magnetica dei raggi Becquerel, le quali dimostravano che la massa degli elettroni aumenta colla velocità, Max Abraham [5]) propose una dinamica degli elettroni che rendesse ragione di quei fenomeni e, confrontando le formole ottenute, tanto coi

1) Tisserand. Sur les mouvements des planètes etc. C. R. 110, p. 313 ed anche M. Lévy. C. R. 110, p. 545, 1890.

2) J. J. Thomson. Elettricità e materia. Trad. di G. Faè, p. 56, Milano. U. Hoepli, 1905.

3) E. Riecke. Lehrbuch d. Phys., 2, p. 358-359, Leipzig, 1902 ed anche J. J. Thomson, l. c. p. 51 e segg.

4) W. Kaufmann. Gött. Nachr., 1901.

5) M. Abraham. Gött. Nachr. 1902, p. 20. Ann. d. Phys., 4, 10, p. 105, 1903.

risultati del Kaufmann sulla deviabilità dei raggi Becquerel, quanto con quelli relativi ai raggi catodici, conchiuse che « la massa degli elettroni è di natura puramente elettromagnetica »; ed ancora il Kaufmann, ritornando sulla discussione delle sue prime esperienze [1]) e rifacendone altre più accurate con bromuro di radio [2]), venne a riconfermare l'enunciata proposizione.

Tornando dunque alla supposizione fatta precedentemente, è chiaro che in tal caso l'ammettere che ϕ sia una costante assoluta, o non risponderebbe più alla realtà o non servirebbe più allo scopo di esprimere la massa in funzione di L, T, uguagliando a zero le dimensioni di ϕ. Ma con ciò non è tolta la possibilità di assegnare alla costante stessa ed alla massa le rispettive dimensioni espresse mediante L, T.

Infatti: molte ipotesi si sono proposte per spiegare il fenomeno dell'attrazione universale, le quali però secondo il punto di partenza si possono dividere in due categorie, quelle che dirò *ondulatorie* e quelle *corpuscolari* o degli urti.

Ora, un esame delle teorie finora proposte conduce alla conclusione che nessuna di esse è soddisfacente o per difetti intrinseci o perchè non confortate dai dati che l'esperienza fino ad oggi ci ha potuto dare; ed alla stessa conclusione arriva, nella sua diligente critica, anche il Drude (l. c.).

Tuttavia, in seguito ad ulteriori ricerche, o l'uno o l'altro ordine di idee può avere una prevalenza, e se, a mo' d'esempio, la teoria degli urti riuscisse col tempo ad imporsi, non sarebbe allora di lieve importanza il fatto che, secondo qualsiasi teoria corpuscolare, la massa dovrebbe avere le dimensioni d'una superficie [3]).

In ogni caso, conchiude press'a poco il citato Autore, è sempre lecita la speranza, se non di spiegare in modo affatto esauriente l'enigma dei fenomeni di attrazione universale, almeno di stabilire una relazione numerica fra la così detta costante di gravitazione colle grandezze relative agli altri fenomeni ed ancora di costruire un sistema assoluto di misure

1) W. Kaufmann. G. N. 1902, p. 291.
2) W. Kaufmann. Ibid. 1903, p. 90. V. anche E. Runge G. N. 1903, p. 326.
3) P. Drude, l. c., p. 49.

affatto indipendente dalle proprietà particolari del nostro globo o d' una qualunque sostanza ponderabile, ma basato esclusivamente sulle proprietà universali dell' etere.

Concludendo: nell' incertezza attuale intorno alla via da seguirsi, dobbiam ritenere l' unità di massa come un' unità fondamentale *provvisoria*.

II. — Temperatura.

Per ciò che riguarda la temperatura, essa è inesprimibile in un sistema assoluto di misure mediante le grandezze fondamentali meccaniche — e con essa anche il coefficiente di dilatazione, essendo il loro prodotto di dimensioni nulle — perchè per passare dalla nozione di calore, che ha le dimensioni d' un lavoro, a quella di temperatura, si incontra necessariamente un fattore di capacità non costante, ma dipendente dalle proprietà delle diverse sostanze [1]).

Si voglia allora introdurre, come proposero il Gorczynscky [2]) ed altri, quale nuova grandezza fondamentale la temperatura, affinchè nelle formole di dimensione della conducibilità termica, del calore specifico, dell' entropia ecc. risulti la dipendenza del numero che li misura dalla scelta della scala per le temperature.

Ma, pur ammessa l' opportunità di tale introduzione nelle formole dimensionali, si presenta un' altra questione che su quella dell' opportunità ha una certa precedenza: siccome cioè le relazioni di dipendenza delle grandezze fisiche dalla temperatura variano con lo scegliere l' una e l' altra definizione di questa — in particolar modo passando dalle così dette scale aritmetiche alle geometriche — così, quando si voglia aggiungere questa grandezza fondamentale alle tre usuali L, T, M, bisognerà anzitutto decidere la questione relativa alla scala delle temperature rigorosamente assoluta.

Ora, se si ritiene assoluta una scala delle temp. quando sia veramente indipendente dalla natura di qualsiasi sostanza, non può esser tale una scala aritmetica, non potendosi definire

1) F. Auerbach. Bemerkungen üb. die absol. Temp. Wied. Ann., 64, p. 754, 1898.
2) Lad. Gorczynscky. Phys. ZS. 5, Dec. 1902.

in essa la grandezza *assoluta* del grado, come in quella considerata dall'Auerbach (l. c.), il quale pone = 1 l' aumento di temp. che acquista la massa di 1 gr. d' acqua, quando le venga comunicata una quantità di calore equivalente all' unità di lavoro.

Inoltre le comuni scale delle temp., che pure prendono il nome di assolute, sono stabilite in modo che effettivamente dipendono dalle proprietà particolari di qualche sostanza.

A questo proposito veggasi una nota dello Schreber [1]), il quale, dopo aver constatata tale dipendenza, propone un esempio di scala assoluta delle temp., di cui dirò fra poco.

Io mi accontenterò di osservare che nella scala termodinamica o di Lord Kelvin la relazione

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{T_1}{T_2}$$

definisce, è vero, la temp. indipendentemente da qualunque sostanza, ma lascia indeterminata la grandezza del grado; qualora non si ricorra alla differenza di temperatura fra il punto di fusione ed il punto d' ebollizione dell' acqua ad una determinata pressione.

Allo scopo dunque di stabilire una scala che permetta di definire la grandezza assoluta del grado, senza ricorrere a nessuna particolare sostanza, ma fondata esclusivamente sui principii della Termodinamica, si consideri il così detto grado di perdita di un processo reversibile, cioè il rapporto $\frac{Q_2}{Q_1}$ fra la quantità di calore (non trasformata in lavoro) ceduta al refrigerante e quella che vien tolta dalla sorgente, e si ponga, indicando con $\Delta\vartheta$ la differenza di temp. fra la sorgente ed il refrigerante, indipendentemente dalla posizione della scala, dove si considera tale differenza:

$$\text{(II)} \qquad \frac{Q_2}{Q_1}=\left(\frac{1}{k}\right)^{\Delta\vartheta} \qquad k>1$$

1) K. Schreber. Die absol. Temp. Wied. Ann., 64, p. 163-185. Sullo stesso argomento fanno seguito altre due: ibid. 65, p. 648; 66, p. 1186.

dove k è una costante in nostro arbitrio e che si può scegliere in modo per es. che non risulti troppo grande la differenza unitaria di temp.

Ciò equivale a porre uguale ad 1° la diff. di temp. di due corpi C_1, C_2, essendo C_1 a temp. maggiore di C_2, quando, mediante un processo reversibile fra C_1 e C_2, togliendo al corpo C_1, k unità di calore [1]), ne passa *una* al corpo più freddo C_2, mentre la rimanente parte si trasforma in lavoro.

In generale, noto il grado di perdita, oppure il rapporto inverso $\frac{Q_1}{Q_2}$ di un processo reversibile fra due corpi qualunque, la loro diff. di temp. è data dalla formola

$$\text{(II')} \qquad \Delta \vartheta = \frac{1}{\log k} \log . \frac{Q_1}{Q_2}$$

dove, ponendo $k = 2,718\ldots$, sparisce la costante, se i logaritmi sono i naturali. Se invece si pone $k = 2$, la definizione data coincide con quella proposta dallo Schreber (l. c. p. 173), secondo la quale si prende uguale ad 1° la diff. di temp. fra due corpi A e B, quando col passaggio dell' unità di calore da A a B va congiunta (in un processo reversibile) la trasformazione in lavoro d' un' unità di calore [2]).

Vero è che tale definizione di temp. sarebbe applicabile meno facilmente delle altre usuali, tuttavia dal punto di vista teorico, essa ci offre un esempio di scala delle temp. che soddisfa a tutte le condizioni d' una scala assoluta, perchè in grazie ad essa le temperature, o meglio le diff. di temp., che

1) Per fissare le idee si supponga che l' unità di calore sia quella equival. all' unità di lavoro, ma si tenga presente che questa scala è indipendente dalla scelta di qualunque unità.

2) In questa scala dello Schreber il *grado* riuscirebbe praticamente troppo grande, così che la diff. di temp. fra il punto di fusione e quello d' ebollizione dell' acqua risulterebbe di circa 0°,45. Bisognerebbe prendere $k = 1,003126$ circa., perchè tale differenza risulti di 100°. Si intende che risulterà minore di 200° (ca. 176°) quella fra 0° C. e 200° C., maggiore di 100° (ca. 120°,5) quella fra 0° C. e — 100° C., perchè le diff. di temp. di una scala geometrica sono proporzionali alle differenze dei logaritmi delle assolute usuali, infatti è

$$\Delta \vartheta = \frac{1}{\log k} (\log T_1 - \log T_2) .$$

sono quelle che effettivamente noi misuriamo [1]), risultano indipendenti dalle proprietà particolari di qualsiasi sostanza.

Concludendo: la temperatura in una scala assoluta risulta affatto di dimensioni nulle rispetto alle grandezze fondamentali meccaniche e quando la si voglia far comparire nelle formole dimensionali (in tal caso *non* sarebbe provvisoria come la massa), dovrà essere definita in modo rigorosamente assoluto, così che la grandezza del grado sia indipendente dalle proprietà di qualsiasi sostanza.

Potrebbe forse sembrare a tutta prima che un fatto analogo ci si presenti anche nel campo delle unità fondamentali meccaniche, cioè che anche per queste debba essere risolta in precedenza la questione relativa ad un sistema rigorosamente assoluto, e decidere per es. se l' unità di lunghezza, anzichè dipendere dalle dimensioni del nostro globo non debba definirsi più universalmente come un multiplo d' una determinata lunghezza d' onda nell' etere libero. Avvertasi invece che tale precedenza nel campo delle unità meccaniche non è necessaria, perchè l' incertezza si riferisce solamente alla grandezza delle unità fondamentali e non alle formole dimensionali, che rimarrebbero in ogni caso inalterate.

III. — Grandezze elettriche.

Dai diversi Autori che trattarono questo argomento si apprende che non si può stabilire *un* sistema veramente assoluto di misure, fondato unicamente sulle grandezze fondamentali della meccanica, e che esiste una doppia infinità di tali sistemi meccanici, ugualmente possibili e legittimi, i quali però non si possono più chiamare assoluti a rigor di termini, perchè sono possibili solamente, quando si facciano speciali supposizioni.

1) L'Auerbach nella memoria citata osserva che la scala proposta dallo Schreber non stabilisce il punto 0° e quindi nessun numero assoluto per le temp., se non si vuol ricorrere, al solito, ad una scelta speciale (come di chiamar zero la temp. di fusione del ghiaccio); ma giustamente lo Schreber risponde che per avere una misura assoluta delle temp. è necessario stabilire in modo assoluto soltanto le diff. di temperatura: analogamente noi misuriamo le differenze di altezza, di velocità, di potenziale elettrico o magnetico, non mai le loro grandezze assolute.

L' Helmholtz pel primo dimostrò l' esistenza di questa doppia infinità di sistemi [1]), ma il Somigliana arriva alla stessa conclusione in modo assai semplice [2]), partendo dalle quattro formole rappresentanti le leggi che regolano le azioni elementari elettriche, magnetiche, elettromagnetiche ed elettrodinamiche, e cioè le due di Coulomb, quella di Laplace e quella di Ampère.

Prescindendo dai segni e dai fattori privi di dimensioni, esse si possono scrivere così

$$F_e = \alpha \frac{e e'}{r^2} \qquad F_m = \beta \frac{m m'}{r^2} \qquad d F_{em} = \gamma \frac{i \, . \, m \, dl}{r^2}$$

$$d^2 F_{ed} = \delta \frac{i i' \, dl \, dl'}{r^2}$$

e mentre le costanti che vi compaiono sono quattro ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$), le relazioni che si possono stabilire fra di esse, anche accettando la comune definizione di intensità di corrente, sono solamente *due* indipendenti [3]), p. es.:

$$\text{(III)} \qquad \beta \delta = \gamma^2 \qquad \frac{\alpha}{\delta} = v^2$$

dove v sta a denotare la velocità critica. Conseguentemente le dimensioni di *due* fra esse non sono determinate, e finchè l' esperienza non ci permette di conoscere anche le altre due relazioni, non ci rimane che assegnare arbitrariamente le dimensioni a due costanti, introducendo ipotesi o definizioni, che valgano a sostituire le due relazioni complementari. Ad es., ponendo α, γ di dimensioni nulle, β viene ad assumere quelle di v^2 e δ quelle di $\frac{1}{v^2}$, come nel sistema elettrostatico di Maxwell; invece ponendo β, γ senza dimensioni, rimane anche δ di dimensioni nulle ed α prende quelle di v^2 (sistema elettromagnetico).

1) Helmholtz. Wied. Ann. 17, 1882.
2) C. Somigliana. Sulle unità elettriche e magnetiche. Rend. Ist. Lomb., S. 2., Vol. 33, 1900.
3) Somigliana (l. c.). Schreber. Wied. Ann., 68, p. 607.

Ritengo utile però ricercare se in qualche modo (e fino a qual punto) è possibile ridurre questa indeterminatezza.

Anzitutto parecchie circostanze parlano in favore della legittimità di ritenere la costante elettromagnetica γ di dimensioni nulle. Infatti mentre nelle formole di Coulomb α e β rappresentano la dipendenza dalle proprietà del mezzo, in quella di Laplace tale dipendenza non risulta espressa dalla costante γ, la quale non varia da mezzo a mezzo, come risulta dall' esperienza. Riguardo poi alla formola di Ampère, come Hesehus [1]) osserva nella nota citata, se si ammette coll'Ampère che la forza dipendente dalla influenza reciproca degli elementi di corrente agisca in direzione della retta che li unisce, allora basandosi sulle leggi fondamentali dell' elettromagnetismo, si perviene alla seguente espressione di detta forza [2])

$$d^2 F_{ed} = \frac{1}{\beta} \frac{i\, i'\, dl\, dl'}{r^2} (2 \cos \varepsilon - 3 \cos \theta \cos \theta') .$$

Ora, confrontando questa colla formola di Ampère, si deduce subito che δ deve avere le stesse dimensioni di $\frac{1}{\beta}$ e quindi γ esser privo di dimensioni. Infine il porre γ di dimensioni nulle equivale ad introdurre un nesso elettromagnetico fra le grandezze elettriche e magnetiche, pel quale ogni unità del gruppo magnetico si può ricondurre ad una del gruppo elettrico e viceversa [3]) (come la forza magneto-motrice alla corrente elettrica) ; di qui una simmetria nelle formole di dimensione pel fatto che i due sistemi di misura elettrostatico ed elettromagnetico vengano in tal modo a fondersi in uno solo.

Ciò posto, non rimane che una sola grandezza elettrica o magnetica, a cui assegnare le dimensioni, per ottenere un sistema di misure affatto determinato, e poichè mancano i dati sufficienti allo scopo bisognerà introdurre, volendo rigettare

1) N. A. Hesehus. Phys. ZS. 3, p. 561-565, 1902. Lad. Goroczynscky. Ph. ZS. 5, Dec. 1902.

2) Vaschy. Traité d'électricité et de magnetisme.

3) G. Giorgi. N. Cim. 5, T. 4, 1902. Sul sistema di unità di misure elettromagnetiche con osservazioni di L. Donati. Cfr. specialmente le p. 21, 22, 26, 32.

qualunque ipotesi, una nuova grandezza fondamentale provvisoria.

Così, ponendo come fa il Gorczynscky (l. c.):

$$\alpha = c\,\frac{1}{K}$$

dove c è una costante assoluta (può supporsi per semplicità $= 1$) e K denota il potere induttore elettrico, una volta scelta opportunamente un' unità di misura per K (per es. in modo che per l' etere libero risulti $\varkappa = 1$), si possono misurare tutte le grandezze elettriche e magnetiche, le cui dimensioni sono allora le seguenti:

Quantità di elettricità	$L^{3/2}\,T^{-1}\,M^{1/2}\,K^{1/2}$
» di magnetismo	$L^{1/2}\,M^{1/2}\,K^{-1/2}$
Momento elettrico	$L^{5/2}\,T^{-1}\,M^{1/2}\,K^{1/2}$
» specifico e densità elettr. super.	$L^{-1/2}\,T^{-1}\,M^{1/2}\,K^{1/2}$
» magnetico	$L^{3/2}\,M^{1/2}\,K^{-1/2}$
Magnetismo specifico.	$L^{-3/2}\,M^{1/2}\,K^{-1/2}$
Forza elettromotrice.	$L^{1/2}\,T^{-1}\,M^{1/2}\,K^{-1/2}$
Intensità del campo elettrico.	$L^{-1/2}\,T^{-1}\,M^{1/2}\,K^{-1/2}$
» magnetico	$L^{1/2}\,T^{-2}\,M^{1/2}\,K^{1/2}$
Corrente elettrica e potenziale magnetico	$L^{3/2}\,T^{-2}\,M^{1/2}\,K^{1/2}$
Resistenza elettrica	$L^{-1}\,T\,K^{-1}$
» specifica	$T\,K^{-1}$
Capacità elettrica	$L\,K$
Coeff. di auto-induzione	$L^{-1}\,T^{2}\,K^{-1}$

ecc.

Supponendo K di dimensioni nulle si cade nel sistema elettrostatico di misure, ponendo invece

$$[K] = [L^{-2}\,T^{2}]$$

si ottengono le dimensioni secondo il sistema elettromagnetico.

Si vede dunque che la maggior parte delle formule di dimensione contengono esponenti frazionari, e precisamente [1])

1) P. Joubin. Sur les dimensions des grandeurs élect. et magn. Journ. d. Phys. S. 3, t. 5, p. 398, 1896.

quando esse contengono M, questa è affetta dalla potenza $^1/_2$ e contemporaneamente L entra con potenza frazionaria e K colla potenza $\pm\,^1/_2$; quando invece M non entra in queste formole, tanto L, quanto l'unità provvisoria K hanno esponenti interi, infine l'esponente di T è sempre intero.

Ora, poichè tutte le formole di dimensione delle grandezze meccaniche contengono esponenti tutti interi, il fatto su esposto ci fa ritenere come probabile [1]) che l'unità provvisoria K debba avere tali dimensioni meccaniche (a noi ignote), da rendere interi anche gli esponenti di L, M in tutte le formole.

A raggiungere l'intento di rendere interi tali esponenti, si può sostituire a K un'altra grandezza (p. es. la quantità di elettricità o di magnetismo), oppure si può fra i possibili sistemi meccanici di misura, che ammettono formole dimensionali con esponenti tutti interi, scegliere quello che meglio si accorda colle interpretazioni più soddisfacenti dei risultati sperimentali.

Questa seconda via fu seguita anzitutto dal Brillouin [2]), partendo dall'ipotesi — suggerita dalla teoria elettromagnetica della luce — che una delle due quantità, forza magnetica o forza elettrica, sia identica riguardo alle dimensioni ad una delle quantità: spostamento, forza elastica, rotazione, forza motrice ecc. (l. c. p. 300). Però dei molti sistemi dimensionali, tutti ad esponenti interi, che così si possono ottenere, l'A. considera solo quelli che soddisfano a queste condizioni; che le dimensioni della quantità di elettricità e del potenziale elettrostatico siano quelle di una grandezza meccanica indipendente da qualsiasi idea di direzione, e che al contrario contengano tale idea di direzione quelle che corrispondono alle dimensioni della forza elettrostatica, magnetica, del vettore

1) Non si dimentichi però che M è una grandezza fondamentale provvisoria e che quindi il presentarsi degli esponenti frazionari nelle formole di dim. delle grandezze elettriche e magnetiche può derivare dal fatto che essa non è stata scelta opportunamente. Se per es. si suppone che essa abbia le dimensioni (I) assunte nel citato sistema astronomico, essendo dispari l'esponente di L e pari quello di T, scomparirebbero gli esponenti frazionari sì nelle formole usuali dei sistemi elettrostatico ed elettromagnetico, come in quelle più generali (tranne che per K).

2) M. Brillouin. Extraits de mémoires et quelques notes nel libro citato di W. Thomson. Conf. sc. ed alloc. Nota 1. Sur les dimensions des unités electr. p. 295.

potenziale ecc. Rimangono così tre soli sistemi, secondo i quali la forza elettrostatica ha le dimensioni d'una accelerazione o d'una forza o d'una forza per unità di volume, e la quantità di elettricità rispettivamente le dimensioni d'una massa, d'una costante assoluta o di un volume. Di questi tre sistemi il citato Autore manifesta una preferenza pel secondo (p. 303).

In modo meno ipotetico e partendo da altre considerazioni il Joubin arriva ad uno dei sistemi accennati dal Brillouin, ma non tenuto da questi in considerazione per le ragioni sopra dette.

E precisamente il Joubin partendo dal fatto che

$$K = \frac{1}{\alpha} \quad \text{e} \quad K' = \frac{1}{\beta}$$

debbono soddisfare per le (III) alla relazione

$$[K\,K'] = L^{-2}\,T^{2}$$

conclude che tanto nelle dimensioni di K, quanto in quelle di K', espresse mediante grandezze meccaniche, gli esponenti di L, M devono essere dispari e pari quelli di T, onde attribuisce loro le seguenti dimensioni

$$\text{(IV)} \qquad [K] = L\,T^{2}\,M^{-1} \qquad [K'] = L^{-3}\,M$$

perchè, com'è facile persuadersi, sono le sole che, soddisfacendo alle condizioni predette, hanno un significato meccanico, infatti K avrebbe le dim. d'un coefficiente di comprimibilità cubica (oppure $\frac{1}{K}$ quelle d'un coefficiente d'elasticità), mentre K' avrebbe quelle d'una densità.

Di più, ricordando la relazione

$$\sqrt{\alpha\beta} = v$$

che si può scrivere anche così

$$v = \sqrt{\frac{\alpha}{1:\beta}} = \sqrt{\frac{\beta}{1:\alpha}}$$

e confrontandola colla formola relativa alla velocità di propagazione delle perturbazioni meccaniche

$$v = \sqrt{\frac{e}{d}}$$

si presenta spontanea l' analogia fra α e l' elasticità del mezzo (e) e per conseguenza fra $1/\beta$ e la sua densità (d), onde seguono le dimensioni (IV). Si potrebbe anche scambiare fra di loro le dimensioni di K e K', ma ciò non porterebbe altra conseguenza che di scambiare fra di loro quelle delle grandezze elettriche e magnetiche corrispondenti.

Il Gorczynscky (l. c.) fa osservare però, come il supporre valida anche per le perturbazioni elettromagnetiche quella relazione fra velocità di propagazione ed elasticità e densità del mezzo sia troppo arbitrario perchè senza fondamento sperimentale, e soltanto si possa considerare come un' estrapolazione molto larga.

Inoltre non essendo noto nè il coefficiente di compressibilità dell' etere, nè la densità, praticamente manca il criterio per fissare in grandezza l' unità di misura di una e quindi di tutte le grandezze elettriche e magnetiche, a meno di ricorrere ad ulteriori ipotesi o seguire ragioni di opportunità.

Ma prescindendo dalla praticità del sistema, sta il fatto che tutte le altre supposizioni che conducono a dimensioni razionali per le grandezze elettriche e magnetiche, espresse puramente mediante le unità fondamentali meccaniche, sembrano assai meno accettabili, in quanto che non ammettono per entrambe le dimensioni di K e K' un significato meccanico, o non presentano per quelle delle altre grandezze alcuna ovvia interpretrazione. Invece nel sistema proposto dal Joubin una quantità di elettricità ha le dimensioni d' una superficie, il potenziale elettrico quelle d' una tensione superficiale e l' intensità di corrente quelle d' un coefficiente di diffusione. Infine la resistenza elettrica specifica, il campo elettrico e magnetico hanno rispettivamente le dimensioni di una costante d'attrito interno, d' una pressione e d' una velocità, come risulta dalla seguente tabella:

Quantità di elettricità	L^2
» di magnetismo	$T^{-1}\,M$
Momento elettrico.	L^3
» specifico e densità superf.	$L^0\,T^0\,M^0$
Momento magnetico	$L\,T^{1}\,M$
Forza elettromotrice . , ...	$T^{-2}\,M$
Intensità del campo elettrico	$L^{-1}\,T^{-2}\,M$
» » magnetico	$L\,T^{-1}$
» di corrente e potenziale magnetico	$L^2\,T^{-1}$
Resistenza elettrica	$L^{-2}\,T^{-1}\,M$
» specifica	$L^{-1}\,T^{-1}\,M$
Coefficiente d' auto-induzione	$L^{-2}\,M$
Capacità elettrica	$L^2\,T^2\,M^{-1}$

In seguito il Joubin [1]) ha anche mostrato come il fenomeno di Hall, quelli piezo-elettrici e magneto-ottici e la teoria dell' elettrolisi dànno ragione al suo modo di vedere, in base però all' ipotesi che certe costanti siano affatto prive di dimensioni.

Ma per meglio comprendere la portata di siffatte ipotesi, converrebbe domandare alle teorie di tali fenomeni il significato delle costanti, che si suppongono di dimensioni nulle.

Volendo considerare per es. i fenomeni piezo-elettrici, si sa che il fondamento della teoria generale di questi consiste nel principio che le componenti, secondo tre assi ortogonali, dei momenti elettrici specifici, destati da una qualunque deformazione del cristallo, siano funzioni lineari delle grandezze di deformazione [2]), che cioè si possa porre in generale:

$$(a)\quad \left\{ \begin{array}{l} a = \varepsilon_{11}\,x_x + \varepsilon_{12}\,y_y + \varepsilon_{13}\,z_z + \varepsilon_{14}\,y_z + \varepsilon_{15}\,z_x + \varepsilon_{16}\,x_y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

dove le componenti di deformazione sono le x_x, y_y ... x_y, e le ε_{hk} denotano le *costanti piezo-elettriche* della sostanza.

Analogamente si pongono le deformazioni, a temperatura costante, funzioni lineari delle componenti di pressione X_x, Y_y, ... X_y, cioè:

1) P. Joubin. Journ. de Phys., T. 6, p. 57, 1897.

2) W. Voigt. Allgemeine Theorie d. piezo-und pyro-elect. Ersch. Abh. d. K. Ges. d. Wiss. zu Gött. 36, 1890. Wied. Ann. 66, p. 1030, 1898.

$$(b)\quad \begin{cases} -x_x = s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z + s_{14} Y_z + s_{15} Z_x + s_{16} X_y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad s_{hk} = s'_{kh} \end{cases}$$

dove le s_{hk} rappresentano i *moduli di elasticità* della sostanza.

Allora i momenti elettrici si possono esprimere come funzioni lineari delle pressioni :

$$(c)\quad \begin{cases} -a = \delta_{11} X_x + \delta_{12} Y_y + \ldots + \delta_{16} X_y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

in cui le δ_{hk} sono i *moduli piezo-elettrici* e sono definiti dalle formole

$$(d)\qquad \delta_{ih} = \sum_k \varepsilon_{ik}\, s_{hk}\,.$$

Da tutto ciò risulta immediatamente che le dimensioni del modulo piezo-elettrico δ sono, per le (*c*), quelle d' un momento elettrico specifico diviso per una pressione :

$$[\delta] = \frac{L^{-1/2}\, T^{-1}\, M^{1/2}\, K^{1/2}}{L^{-1}\, T^{-2}\, M} = L^{1/2}\, T\, M^{-1/2}\, K^{1/2}$$

ma per le (*d*) sono anche quelle d' un modulo di elasticità (o dell' inversa d' una pressione) moltiplicato per la costante piezo-elettrica, *e se questa costante si suppone di dimensioni nulle* $[\delta]$ deve avere le dimensioni

$$[\delta] = L\, T^2\, M^{-1}$$

e conseguentemente

$$[K] = L\, T^2\, M^{-1}$$

come suppone il Joubin. Ora, siccome per le (*a*) la costante piezo-elettrica si può ritenere, riguardo alle sue dimensioni, uguale al prodotto d' una deformazione per un momento elettrico specifico, così (essendo una deformazione un rapporto puramente numerico) il supporre la costante piezo-elettrica priva di dimensioni equivale al supporre nulle le dimensioni del momento elettrico specifico e della densità superficiale, cioè queste due ipotesi hanno lo stesso grado di arbitrarietà.

Un' altra deduzione delle dimensioni che il Joubin assegna a K ce l' offre, come dissi, la teoria elettrolitica degli ioni,

secondo la quale « la conducibilità molecolare di un elettrolito è uguale alla somma delle velocità degli ioni per una differenza di potenziale unitaria », onde risulta per le dimensioni di essa

$$\frac{LT^{-1}}{T^{-2}M} = L\,T\,M^{-1},$$

dimensioni, che secondo il sistema in discorso sono quelle della conducibilità specifica.

Ma — pur non tenendo conto dell' osservazione che non è lecito estendere tali considerazioni, le quali si riferiscono al trasporto dell' elettricità negli elettroliti, anche al caso delle correnti che hanno luogo sui conduttori metallici — se si considera la questione più da vicino, si vede che quella interpretazione è troppo arbitraria e che la legge del Kohlrausch non permette nessuna deduzione dimensionale.

Essa infatti si può enunciare così : « la conduttività molecolare per equivalente elettrochimico è uguale alla somma delle assolute mobilità degli ioni [1]) »

$$\lambda = U + V\,.$$

Ora, l' assoluta mobilità degli ioni ha le dimensioni d' una velocità divisa per una differenza di potenziale riferita all'unità di lunghezza [2])

$$[U] = [V] = \frac{\text{velocità}}{\text{f. e. m. lunghezza}} = L^{3/2}\,M^{-1/2}\,K^{1/2}$$

Quanto alla conducibilità molecolare essa è definita [3]) come il rapporto fra la conduttività specifica e la così detta concentrazione in equivalenti elettrochimici (numero degli equival. elettroch. contenuti nell' unità di volume) ; tale concentrazione in eq. el. ha le dimensioni d' una quantità di elettricità divisa per un volume, mentre la conducibilità ha le dimensioni $T^{-1}K$, onde per λ si ottiene

$$[\lambda] = \frac{T^{-1}\,K}{[L^{3/2}T^{-1}\,M^{1/2}\,K^{1/2}] : L^{3}} = L^{3/2}\,M^{-1/2}\,K^{1/2}$$

1) E. Riecke, op. cit. 2, p. 480. — A. Roiti. El. di Fisica, 2, p. 506, 4. ediz. 1903-1904.

2) E. Riecke, op. cit. p. 482.

3) E. Riecke, op. cit. p. 479.

Cioè l' uguaglianza

$$[\lambda] = [U]$$

non può costituire un' equazione dimensionale, che permetta di dedurre le dimensioni di K sia pure ipoteticamente, essendo una identità.

Concludendo: per quanto il sistema proposto da Joubin abbia buone ragioni per essere preferito agli altri analoghi che si potrebbero escogitare, pure il modo ipotetico con cui, allo stato attuale delle nostre cognizioni, siamo costretti a stabilire le dimensioni meccaniche di una e quindi di tutte le grandezze elettriche e magnetiche rende preferibile l'assumere una di queste come unità fondamentale provvisoria, quando si scelga in luogo di K una quantità di elettricità (E), con che, come si è detto, le formole dimensionali risultano tutte con esponenti interi.

Quantità di elettricità	E
» di magnetismo	$L^{2} T^{-1} M E^{-1}$
Momento elettrico	$L E$
» specifico	$L^{-2} E$
» magnetico	$L^{3} T^{-1} M E^{-1}$
Magnetismo specifico.	$T^{-1} M E^{-1}$
Forza elettromotrice e diff. di potenziale	$L^{2} T^{-2} M E^{-1}$
Intensità del campo elettrico	$L T^{-2} M E^{-1}$
» » magnetico	$L^{-1} T^{-1} E$
» di corrente elettrica	$T^{-1} E$
Potenziale magnetico	»
Resistenza elettrica	$L^{2} T^{-1} M E^{-2}$
Resistenza specifica	$L^{3} T^{-1} M E^{-2}$
Capacità elettrica	$L^{-2} T^{2} M^{-1} E^{2}$
Coefficiente d' auto induzione.	$L^{2} M E^{-2}$
[K]	$L^{-3} T^{2} M^{-1} E^{2}$
[K']	$L M E^{-2}$

A tal preferenza sono condotto dalle seguenti considerazioni: nel campo dei fenomeni elettrici, se si tien conto specialmente delle recenti ricerche sugli elettroni, si presenta qualche cosa di elementare e di irreducibile ai modelli pura-

mente meccanici, vale a dire gli elettroni stessi, ovvero la loro carica che si ritiene coincidere tanto con quella d'un ione monovalente nell'elettrolisi, quanto con quella d'un ione di gaz.

Lo scegliere per conseguenza una quantità di elettricità (per es. quella di un elettrone o quella portata da un equivalente) come unità elettrica fondamentale sarebbe da una parte più logico, mentre d'altra parte è lecito sperare, in vista dell'odierna tendenza di spiegare i fenomeni fisici partendo dalla teoria degli elettroni, che l'esperienza ed un miglior sviluppo della teoria possano condurre ad una relazione fra la grandezza elettrica scelta e quelle puramente meccaniche; nel qual caso si potrà sopprimere o quella elettrica, esprimendola in funzione delle meccaniche, oppure una delle meccaniche (la massa) esprimendola in funzione delle altre due e di quella elettrica.

La libertà di scelta in talun caso potrebbe riuscire impossibile, per es. quando E fosse di dimensioni nulle rispetto alla massa, come in una delle ipotesi ammesse dal Joubin $[E]=[L^2]$ perchè allora la massa è inesprimibile in funzione di L, T, E.

In altri casi potrebbe la scelta essere suggerita da ragioni di opportunità, quando si vogliano per es. evitare gli esponenti frazionari [1]), ed infine da argomenti di indole teorica, quando la soppressione della massa potesse risolvere anche la questione relativa alla sua provvisorietà, a cui ho accennato in principio, quando cioè fosse possibile stabilire un'unità di misura della quantità di elettricità che, a preferenza dell'unità di massa, potesse chiamarsi assoluta.

Solo adunque una più completa conoscenza delle leggi fisiche e specialmente dei fenomeni elettrici, ci può permettere di risolvere la questione relativa alle grandezze fondamentali provvisorie, che oggidì è necessario introdurre se non si vuole accettare un sistema di formole dimensionali che presentino il pericolo di trovarsi in contraddizione coi fatti.

Milano, marzo 1905.

---

1) Sarebbe questo il caso se le dimensioni di M espresse mediante L, T, E contenessero E alla 2.ª potenza, o in generale con potenza pari.

OSCILLAZIONI ISOCRONE DEL MERCURIO IN TUBI COMUNICANTI,

del Prof. ANTONIO PIZZARELLO.

Perchè una massa qualunque oscilli isocronicamente al di quà ed al di là di un punto fisso necessita che la forza sollecitante la massa verso il punto fisso sia in ragione diretta della distanza dal punto stesso. In tal caso si dimostra facilmente che il tempo di un' oscillazione semplice viene dato dalla $t = \pi \sqrt{\frac{s}{a}}$, nella quale s rappresenta la distanza che tiene la massa dal punto fisso al principio dell' oscillazione ed a l' accelerazione che acquisterebbe la massa oscillante dalla intensità della forza al principio dell' oscillazione.

Dalla relazione si vede che, se l' ampiezza s aumenta o diminuisce, nello stesso rapporto aumenta o diminuisce l' accelerazione a e perciò t rimane costante per qualsiasi ampiezza.

Per dimostrare sperimentalmente l' isocronismo di tali oscillazioni, variando l' ampiezza, ordinariamente si ricorre alla reazione elastica alla torsione. Si usa citare anche il movimento isocrono che avrebbe una massa attratta dal suo peso verso il centro della terra, ammesso che un punto della superficie di questa fosse messo in comunicazione con gli antipodi per mezzo di un canale rettilineo che passasse pel centro della terra. Perchè tal movimento puramente ideale fosse veramente isocrono, bisognerebbe che la densità della terra fosse sensibilmente costante.

Abbiamo, senza bisogno di ricorrere a questo fantastico movimento, un esempio di moto oscillatorio isocrono prodotto da una forza che varia esattamente, anzi matematicamente con la distanza della posizione d' equilibrio. Il moto oscillatorio di un liquido, il mercurio è il più adatto, che si trovi in due tubi comunicanti e che venga in qualsiasi modo spostato dalla posizione di equilibrio, si manifesta veramente isocrono, perchè la forza che mette il liquido in movimento è veramente d' intensità proporzionale alla distanza tra la superficie libera oscil-

lante e la posizione di essa quando il liquido nei due tubi trovasi in quiete (equilibrio).

Infatti supponiamo che, quando il liquido è in quiete, il livello nei due tubi sia O ed O_1 (fig. 1). Se, senza variare la

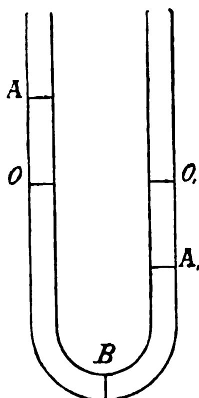


Fig. 1.

massa del mercurio, alziamo il livello nel tubo a sinistra fino in A contemporaneamente si abbasserà della stessa quantità il livello nel tubo a destra sotto O_1 fino in A_1 (ammesso che i due tubi comunicanti abbiano sempre la stessa sezione). La forza che porrà in moto la fune di mercurio A A_1 sarà data dal peso di una colonna di questo liquido che ha per base la sezione del tubo e per altezza la doppia distanza A O qualsiasi tale distanza. Questa forza sarà così sempre proporzionale alla distanza A O e perciò la superficie libera del liquido dovrà oscillare isocronicamente al di quà ed al di là della superficie di livello O O_1.

Per calcolare la forza al principio dell' oscillazione supponiamo che tutto il mercurio si trovi nel tubo di sinistra terminando in B. In tal modo al principio dell' oscillazione sarà il peso di tutta la fune di mercurio a mettere in movimento la fune stessa e perciò naturalmente al principio dell' oscillazione l' accelerazione sarà la g terrestre e quindi per la durata dell' oscillazione avremo $t = \pi \sqrt{\frac{s}{g}}$ dove s sarà la distanza tra la superficie libera del mercurio nel tubo a sinistra a

principio dell' oscillazione ed il livello $O O_1$ cioè metà della fune del mercurio che oscilla.

Da parecchi anni e nella prima lezione d' acustica e per materializzare in qualche modo le scintille elettriche oscillanti faccio constatare ai miei scolari il perfetto isocronismo del mercurio che trovasi nei tubi comunicanti. Quest' anno volli verificare anche la durata di tali oscillazioni. Nei miei tubi di vetro uniti fra loro con un tubo di gomma, essendo il diametro interno dei primi maggiore di quello del secondo, osservai che l' isocronismo sensibilmente si mantiene con ampiezze fortemente diverse, ma che la durata è ben superiore di quella voluta dalla formola. Fatta tale osservazione innestai dei tubi di vetro di diametro interno minore di quello del tubo di gomma e vidi, come prevedevo, che la durata dell' oscillazione con essi era minore di quella voluta dal calcolo. E così deve essere ; perchè per gli strati di mercurio che stanno nel tubo di gomma la velocità è la stessa che avrebbero anche se nel tubo di vetro la sezione fosse eguale a quella del tubo di gomma (principio di Pascal) mentre la velocità negli strati del mercurio che si trova nei tubi di vetro, quando in essi la sezione è minore (dovendo per coesione seguire gli strati sottostanti) deve essere minore e perciò viene abbreviata l' oscillazione. Viceversa poi avviene se il diametro dei tubi di vetro dove oscilla la superficie libera del mercurio è maggiore del tubo di gomma elastica. Constatato tal fatto con varie esperienze cercai dei tubi di vetro che avessero diametri sensibilmente eguali a quello interno del tubo di gomma e trovai due tubi di vetro di diametro interno sensibilmente uniforme ed eguale a cm. 0,85 e due altri di diametro interno eguale a 0,65 circa. Il diametro interno del tubo di gomma da me adoperato è di cm. 0,8, mentre il diametro esterno è di cm. 2.

Innestati i due primi ad uno di gomma lungo cm. 206 in modo di avere una fune di mercurio di cm. 226 ebbi per durata di un oscillazione 1,1" ottenendo per 20 oscillazioni una durata di 22" per 16 oscillazioni 17,6" per 10 oscillazioni 11" quasi sempre, raramente $^1/_5$ di secondo in più o in meno e con ampiezze molto diverse e perciò perfetto isocronismo.

Se la sezione fosse stata eguale nei due tubi di vetro o nel tubo di gomma la durata sarebbe stata quella ricavata dalla formola $t = \pi \sqrt{\frac{113}{981}} = 1{,}067$. La differenza di poco più di 0,03 di secondo è dovuta alla differenza in più nel diametro dei tubi di vetro.

Innestati gli stessi tubi di vetro in un tubo di gomma lungo cm. 613 in modo di avere una fune di mercurio di cm. 633 per ripetute esperienze ottenni una durata 1,85" mentre col calcolo, se tubi di vetro e di gomma avessero avuto la stessa sezione, sarebbe stata di 1,79".

Innestati quindi al primo tubo di gomma i tubi di vetro del diametro di cm. 0,65 in modo di avere una fune di mercurio di cm. 230 ebbi per durata dell' oscillazione, sempre bene inteso per ripetute esperienze, 0,9", mentre col calcolo, se i tubi avessero tutti avuto sempre la stessa sezione, la durata avrebbe dovuto essere di 1,08" circa. Qui la differenza nel tempo è più forte, perchè la differenza tra il diametro del tubo di gomma e quello dei tubi di vetro è maggiore cioè di circa cm. 0,15. Innestati gli stessi tubi di vetro al tubo di gomma lungo cm. 613 in modo di avere una fune di mercurio oscillante di cm. 630 ebbi una durata di 1,45" mentre col calcolo per tubi tutti sempre dello stesso diametro sarebbe stata di 1,78" circa.

Volli fare delle esperienze anche con un tubo ad U tutto in vetro; anche questo però ha una sensibile strozzatura nella curva per la qual cosa la sezione nella curva è alquanto minore della sezione nelle due parti verticali. Facendo oscillare in questo una fune di mercurio di cm. 33 ebbi una durata di 0,42", mentre col calcolo senza la strozzatura la durata sarebbe stata di 0,408. Facendo quindi oscillare una fune di mercurio di cm. 57,5 ebbi per durata di un oscillazione 0,56" mentre col calcolo senza la strozzatura sarebbe stata di 0,534.

La manovra che tengo per ottenere un dislivello qualunque $A A_1$ nei due tubi e per misurare con errore minore di $^1/_5$ di secondo un certo numero n di oscillazioni, che è stato fino a 25 con i tubi di gomma e che è stato di 40 e più con il tubo ad U tutto in vetro è semplicissima. Se i due tubi di vetro sono congiunti con uno di gomma, alzo momentaneamente

il tubo a destra, fatto ciò col polpastrello d' un dito chiudo il tubo a sinistra e porto il tubo, che avea alzato, nella posizione di prima. Se poi il tubo è tutto in vetro lo inclino dalla parte sinistra, chiudo col polpastrello di un dito il tubo a sinistra e rimetto il tubo ad U nella posizione verticale. Ottenuto così un dislivello $A A_1$, più o meno grande, tolgo il dito dal tubo a sinistra e contemporaneamente con l' altra mano metto in movimento il cronografo. Quando ho contato le n oscillazioni, fermo il cronografo; osservato il tempo per le n oscillazioni lo divido per n ed ho il tempo di un' oscillazione.

Per avere dei risultati migliori, cioè per trovare con l'esperienza delle durate sensibilmente eguali a quelle ottenute per la formola $t = \pi \sqrt{\frac{s}{g}}$ ho ordinato un tubo ad U con rami ciascuno di oltre un metro del diametro interno sensibilmente eguale anche nella parte curva ed eguale a circa cm. 2. Con questo tubo spero di poter contare circa un centinaio di oscillazioni prima che l' ampiezza si renda insensibile, perchè con quello in vetro che ho e che ha un' altezza di 40 cm. circa ed un diametro interno di un cm. e con una fune di cm. 57,5 con forte dislivello $A_1 A_1$ potei contarne fino a 60. Se mi riuscirà di averlo senza strozzature, contando molte oscillazioni, io spero di potere per mezzo della durata dell' oscillazione del mercurio trovava la g terrestre con errore di qualche centimetro soltanto. Potrò inoltre, variando la quantità di mercurio, che collocherò nel tubo, avere delle oscillazioni di durata diversa, da meno di un terzo di secondo ad oltre un secondo.

Il forte attrito che il mercurio incontra alle pareti del vetro, è causa della forte diminuzione di ampiezza delle oscillazioni della fune del mercurio, ma non sensibilmente della durata.

Trovai sempre, come già dissi, in tutte le esperienze con tutti i tubi che le prime oscillazioni molto ampie durano come le ultime di ampiezza molto minore e appena sensibili. Che l' attrito tra il mercurio e il vetro sia molto forte, lo si scorge dal fatto che le piccole bollicine d' aria, imprigionate tra la parete del vetro e il mercurio, e che si trovano a profondità

anche di poco inferiori al livello più basso a cui giunge il menisco del mercurio alla fine della discesa, si mantengono immobili durante l'oscillazione della fune di mercurio.

Se esse sono immobili, è naturale che gli strati di mercurio vicini al vetro non si muovano, e ciò per il forte attrito tra il vetro ed essi.

Gli strati immobili per l'attrito interno rallenteranno anche la velocità degli strati attigui, e quindi la velocità massima l'avremo al centro della fune. In causa di ciò il menisco ascendente è sempre fortemente convesso, mentre il discendente si fa anche concavo quando l'ampiezza dell'oscillazione è sufficientemente grande. Anche tale differenza dei menischi causata dall'attrito tra il vetro e il mercurio influisce sul diminuire fortemente l'oscillazione, e non già, almeno sensibilmente, sulla durata dell'oscillazione semplice, che rimane sempre costante, e ciò perchè di quanto l'attrito e la somma algebrica delle due tensioni superficiali fanno aumentare il tempo della prima metà dell'oscillazione semplice di tanto lo stesso attrito e la somma algebrica delle due tensioni superficiali fanno diminuire il tempo della seconda metà dell'oscillazione semplice.

Quindi le oscillazioni semplici appaiono isocrone mentre le mezze oscillazioni od i quarti dell'oscillazione complete sono alternativamente di tempo maggiore e di tempo minore.

Per coloro che non avessero presente una dimostrazione qualunque della necessità di una forza che solleciti una massa verso il punto di equilibrio che vari proporzionalmente alla distanza da questo punto, perchè la massa esegua delle oscillazioni isocrone con qualsiasi ampiezza, mi permetto di indicarne una che molto probabilmente sarà ben conosciuta.

A X O A_1

Un punto materiale che si trova in A sia sollecitato verso O da forza che sia proporzionale alla distanza tra il punto materiale che si muove, partendo da A, ed il punto O fisso nello spazio.

Prima di tutto osserviamo che, sollecitato da una forza continua, il punto materiale arriverà in O con la massima velocità e che perciò, giunto in O, proseguirà verso A_1. Da O in A_1 la forza agirà in senso opposto alla velocità del corpo ed, agendo proporzionalmente alla distanza farà perdere, giungendo in un punto qualunque, tutta quella velocità che aveva acquistato dall' altra parte, movendosi dal punto egualmente distante da O fino in O, in modo che, giunto in A_1, avrà perduto tutta la sua velocità. Agendo la forza sempre proporzionalmente alla distanza il punto materiale da A_1 ritornerà in O e quindi in A ed avremo un movimento periodico da A in A_1 e da A_1 in A. Vediamo ora come varierà la velocità, che in A ed in A_1 è nulla e che in O è massima, durante il movimento ed il tempo impiegato per eseguire una di queste oscillazioni.

Giunto il punto materiale in un punto intermedio X sarà per le condizioni con le quali varia la forza che lo sollecita: $f : f_1 :: s : x$ indicando con f la forza che lo sollecita al principio del movimento ed f_1 la forza che lo sollecita quando è giunto in X punto intermedio qualunque tra A ed A_1, s la distanza AO ed x la distanza XO.

Da essa ricaveremo $f_1 = \frac{fx}{s}$. La velocità del punto materiale, quando questo è giunto in X, la ricaveremo dalla forza viva di esso $\frac{mv_1^2}{2}$ che sarà data dal prodotto della forza media che ha spinto il punto materiale lungo lo spazio $(s - x)$ per detto spazio. Lungo lo spazio $(s - x)$ la forza media è evidentemente eguale a $\frac{f + f_1}{2}$, perchè nei singoli punti dello spazio $(s - x)$ la forza è rappresentata da termini di una progressione aritmetica decrescente il primo dei quali è f e l' ultimo è f_1. Perciò avremo:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{f + f_1}{2} (s - x)$$

ed introducendo il valore di f_1:

$$mv_1^2 = \left(f + f\frac{x}{s}\right)(s - x) = \frac{f}{s}(s + x)(s - x)$$

e chiamando con a l' accelerazione che produrrebbe la forza f sulla massa oscillante m avremo:

$$mv^2 = \frac{ma\,(s+x)\,(s-x)}{s}$$

da cui

$$v_1 = \sqrt{\frac{a\,(s+x)\,(s-x)}{s}}$$

Conosciuta la velocità che avrebbe il punto materiale di massa m giunto in un punto qualunque tra A ed A_1 cerchiamo con questa il tempo dell' oscillazione.

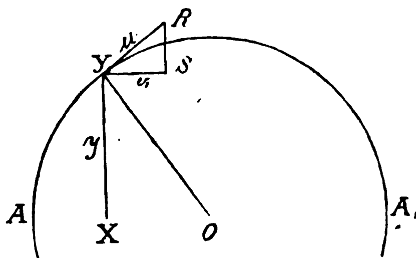


Fig. 2.

Supponiamo che, al momento in cui il punto materiale parte da A attratto verso O, parta contemporaneamente da A, descrivendo la circonferenza, un altro punto materiale in modo tale da trovarsi sempre sulla perpendicolare stessa al diametro AA_1, la quale contiene il punto materiale oscillante con velocità $\sqrt{\frac{a(s+x)\,(s-x)}{s}}$. Così quando questo sia giunto in X l' altro sia giunto in Y. Chiamando con u la velocità tangenziale di quello giunto in Y certamente la componente di questa parallela ad AA_1 dovrà essere $\sqrt{\frac{a(s+x)\,(s-x)}{s}}$ e quindi per la simiglianza dei due triangoli YRS ed YXO avremo:

$$u : \sqrt{\frac{a(s+x)\,(s-x)}{s}} : : s : YX\,;$$

ma

$$\sqrt{(s+x)(s-x)} = \mathrm{YX} = y,$$

e perciò $u : y\sqrt{\frac{a}{s}} :: s : y$ e quindi $u = s\sqrt{\frac{a}{s}} = \sqrt{as}$ cioè la velocità del punto materiale che deve moversi sulla circonferenza per trovarsi sempre sulla perpendicolare, che contiene l' altro punto oscillante, è costante ed è uguale come si può vedere dalla formola $v_1 = \sqrt{\frac{a(s+x)(s-x)}{s}}$ alla velocità massima del punto oscillante quando arriva in O, cioè quando $x = o$. Ora sarà facile trovare il tempo che impiega il punto che si muove sulla circonferenza per percorrerne metà, tempo impiegato pure dal punto materiale che va da A in A_1 passando per O. Infatti $tu = \pi s$ da cui $t = \frac{\pi s}{u} = \frac{\pi s}{\sqrt{as}} = \pi\sqrt{\frac{s}{a}}$.

Se il punto materiale oscillante anzichè partire da A partisse da un punto più lontano o più vicino ad O, variando la forza al principio del movimento e quindi l' accelerazione che essa produce sul punto materiale come varia s, il rapporto $\frac{s}{a}$ sarà sempre lo stesso e perciò l' oscillazione durerà sempre lo stesso tempo qualsiasi l' ampiezza di essa.

LIBRI NUOVI

ACCUMULATORI ELETTRICI,

Dott. VIRGINIO LUCCHINI.

Biblioteca di Elettricità. Vol. 27, 1905, Milano.

Il Dott. V. Lucchini assistente di Chimica alla R. Scuola di Applicazione degli Ingegneri di Milano ha arricchita la Biblioteca di Elettricità di questo volume veramente desiderato. Esso è diviso in tre parti : storia della pila secondaria; teoria dell'accumulatore al piombo; nozioni tecniche sugli accumulatori.

La prima parte è trattata con larga cognizione e competenza e riesce assai interessante: nella seconda è fatta una rapida rassegna degli studi in argomento apparsi all'estero. La terza parte ha speciale importanza ed è infatti ben composta; essa tratta esaurientemente dei criteri per l'uso degli accumulatori nelle diverse applicazioni esponendone alcune speciali; descrive i più indicati metodi di misura per la determinazione delle costanti degli accumulatori; dà infine le norme per l'allestimento delle batterie, illustrandole colla descrizione di alcune importanti installazioni.

Il libro sarebbe riescito più completo dal lato pratico, se nell'appendice, alla seconda parte di poca utilità, fosse stata sostituita una serie di tavole riguardanti i diversi sistemi di accumulatori coi relativi dati e le costanti: si sarebbero così ricordati tanti tipi che non vediamo accennati nel libro, fra i quali avrebbero trovato degno luogo i nostri del paese: cosa questa che potrà fare l'egregio autore in una nuova edizione dell'utilissimo libro.

Prof. A. Volta.

Dott. G. FAÈ.

ELETTRICITÀ E MATERIA *(dall' inglese)*

di J. J. THOMSON.

con aggiunte.

(Milano, Ulrico Hoepli, 1905. L. 2).

Il Prof. Faè traducendo le magistrali lezioni che ilThomson tenne nel 1903 alla Yale University di New Haven ha fatto un' opera degna della considerazione degli studiosi d' Italia. Perchè l' illustre fisico inglese oltre alla conoscenza perfetta che ha del soggetto per essere stato uno degli studiosi principali delle moderne teorie fisiche, possiede in grado sommo la facoltà della chiarezza e della precisione.

In quest' opera eliminate tutte le parti di carattere esclusivamente tecnico e formale, è riportata la parte essenziale delle nuove teorie della materia.

Premessa la rappresentazione del campo elettrico per mezzo delle linee di forza di Faraday, ne deduce il comportamento dei corpi elettrizzati e l' importantissimo concetto di massa di un corpo elettrizzato in movimento.

Sono poi esposti gli effetti dell' accelerazione dei corpi elettrizzati e le belle teorie dei raggi di Röntgen e della luce ordinaria.

La struttura dell' elettricità e la costituzione dell' atomo sono argomenti trattati con profondità notevole per un libro popolare: tutto quanto è stato fatto sull' argomento, esperienze ipotesi critica, è stato esposto in questa parte.

Chiude l' opera un capitolo sopra la radioattività, seguito da un' interessante appendice del traduttore.

LA STATIQUE CHIMIQUE BASÉE SUR LE DEUX PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THERMODYNAMIQUE.

E. ARIÈS.

(Paris, Hormann 1904, L. 10).

È noto come mediante la introduzione del concetto di potenziale termodinamico molte questioni apparentemente di chi-

mica pura, si risolvono completamente, ed è quindi evidente l'interesse che la teoria di esso potenziale assume rispetto alla fisico-chimica.

L'A. persuaso che nonostante la eccezionale importanza degli studi di termodinamica di Gibbs la loro lettura riesca un po' difficile, ebbe l'idea di esporre in maniera facile ed elegante i principii fondamentali sui quali si basa la teoria stessa prendendo come punto di partenza il principio meccanico degli spostamenti virtuali. Questo è lo scopo prefissosi dall'autore nei primi 5 capitoli della sua opera. In seguito egli applica i principii sviluppati allo studio dei cambiamenti di stato fisico e fenomeni analoghi (fusione evaporazione sublimazione etc...); alla dissociazione ed allo studio delle soluzioni; infine egli tratta i sistemi monofasici e difasici, i gas ideali e le soluzioni diluite.

La trattazione della materia è condotta in maniera lodabile ed il libro è perciò raccomandabile a chi voglia acquistare una idea, sia pure sommaria, degli studii di meccanica chimica. GRASSI.

GRUNDLINIEN DER ANORGANISCHE CHEMIE.

W. OSTWALD.

(Leipzig, Engelmann 1904).

Trattandosi della 2ª edizione di una opera celebre ed universalmente lodata si potrebbe dispensarsi da una recensione limitandosi soltanto a segnalarne agli studiosi la sua pubblicazione. Ci limitiamo perciò a rilevare soltanto i miglioramenti formali della edizione (incisione stampa etc.) ed a raccomandare caldamente lo studio di questa pregevole opera ai nostri giovani colleghi. GRASSI.

DIE FORMELZEICHNEN: EIN BEITRAG ZUR LÖSUNG DER FRAGE DER ALGEBRAISCHEN BEZEICHNUNG DER PHYSIKALISCHEN, TECHNISCHEN UN CHEMISCHEN GRÖSSE.

OLOF LINDERS.

(Leipzig, Jäh e Schunke, 1905).

Questa seconda pubblicazione del Linders conferma un nostro dubbio: Già fin dalla comparsa dell'altro libro del Lin-

ders ci sembrò che l' autore desse una parte eccessiva alle indicazioni algebriche delle grandezze fisiche; nel mentre il suo libro ci fece una eccellente impressione nella parte descrittiva delle grandezze stesse, ci sembrò esuberante la tendenza unificatrice dei simboli esplicata dall'A.

Questa seconda pubblicazione conferma il nostro timore; con la espressione di questo dubbio non intendiamo affatto di dichiararci teoricamente contrarii in maniera esplicita al tentativo del Linders intendiamo solo di esprimere la nostra poca speranza che il sistema stesso sia accettato, ben felici del resto se si potesse venire ad un accordo internazionale che faciliti lo scambio delle attività scientifiche dei diversi paesi.

GRASSI.

CARL ANTON BJERKNES.

GEDÄCHTNISREDE GEHALTEN VOR DER GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU CHRISTIANIA AM 17 APRIL 1903.

V. BJERKNES.

(Leipzig Engelmann, Mk. 1,20).

Estesa esposizione della vita di C. Bjerknes ed in particolare della opera da esso dedicata al noto problema di idrodinamica che porta il suo nome.

GRASSI.

RIVISTA

Comptes Rendus. T. 138, Febbraio, 1904.

Gorczynski Ladislas. *Sulla diminuzione della intensità del raggiamento solare nel 1902 e 1903* (pp. 255-258). — Già il Dufour aveva segnalato nella sua Nota del 26 Marzo 1903 un indebolimento considerevole del raggiamento solare sulla superficie terrestre, che principiato, secondo le osservazioni fatte a Losanna e a Clarens coll' attinometro Crova, nel mese di Dicembre 1902 era andato aumentando fino al mese di Marzo 1903, per poi tornare a diminuire gradatamente.

L' esistenza di un' opacità eccezionale dell' atmosfera era stata riscontrata da altri osservatori a Heidelberg, e a Washington.

La diminuzione dell' intensità del raggiamento solare sulla superficie terrestre è stata riscontrata anche a Varsavia, e l'A. riporta in una tabella alcuni dati ottenuti da osservazioni eseguite coll' attinometro del sistema Angström-Chwolson, dai quali si rileva che una diminuzione più considerevole era cominciata a Varsavia nel mese di Maggio 1902, e aveva persistito durante tutta una serie di mesi di quell' anno e del seguente, raggiungendo il massimo nella primavera del 1903. Verso la fine di quest' anno i progressi della diminuzione dell' intensità, confrontati con quelli del 1902, sembravano arrestarsi, sebbene i valori assoluti continuassero a essere bassi in rapporto a quelli del 1901.

Rispetto alla causa di questa diminuzione il Dufour pensa che possa attribuirsi alle eruzioni della Martinica, per le quali si sono avute, anche nell' Europa, straordinarie cadute di polvere. L'A. osserva che questa non è che una supposizione, la cui esattezza non può ancora essere provata, occorrendo dati positivi più completi.

Chabrié C. *Sul principio della costruzione di un apparecchio ottico destinato a ottenere fortissimi ingrandimenti* (pp. 265-268). — Il principio da cui l'A. parte è quello di produrre delle immagini deformate, ma molto ingrandite, utilizzando le proprietà geometriche di trasformazione delle figure sotto l'influenza dei fenomeni di rifrazione, potendosi poi, con una costruzione geometrica inversa, ristabilire su un disegno gli oggetti rappresentati nei loro rapporti reali.

L'A. in luogo di cercare di avere immagini la cui grandezza variasse nello stesso senso di quella dell' oggetto, osserva che si avrebbe interesse di ottenere immagini sempre più grandi a misura che gli oggetti diventano sempre più piccoli. Ma per evitare che le immagini tendano verso l' infinito a misura che gli oggetti tendono verso zero, l'A. ha imaginato una disposizione, che ripara a questo inconveniente.

La disposizione, semplicemente accennata, consiste nell'avere l' imagine di un oggetto attraverso un cono di cristallo, il cui asse sia perpendicolare al piano dell' oggetto. In tal modo il centro dell' oggetto viene rappresentato da un cerchio di grande raggio, e gli altri punti situati su circonferenze da altri cerchi concentrici al primo, e interni a esso. La distanza di due punti presi su un raggio condotto dal centro dell' oggetto luminoso a una data circonferenza presa sull' oggetto, è appena aumentata nell' imagine, così che quando si vuole esaminare una regione dell' oggetto situata fra due punti presi sulla sua superficie, bisognerà rotare quell' oggetto in modo che i due punti si trovino su una stessa circonferenza, e non su uno stesso raggio.

GUTTON C. *Azione dei campi magnetici su sorgenti luminose poco intense* (pp. 268-270). — L'A. avendo provato l' azione di campi magnetici sulla fosforescenza del solfuro di calcio, arriva alla conclusione che, *ciascuna volta che del solfuro di calcio fosforescente è piazzato in un campo magnetico non uniforme, esso diventa più visibile. L' azione di un campo uniforme è nulla.*

L'A. in queste sue esperienze ha rilevato la estrema sensibilità dell' azione del campo magnetico sulla fosforescenza, e la non istantaneità di quell' azione.

L'A. infine dice di avere ancora constatato che un campo magnetico provoca un' aumento nella sensibilità della vista, in modo simile a quello che già era stato indicato dal Blondlot per i raggi N.

DESLANDRES H. *Legge generale di distribuzione delle righe negli spettri di bande. — Verificazione precisa col secondo gruppo di bande dell' azoto* (pp. 317-323). — La legge generale enunciata dall'A. e verificata col gruppo di bande dell' azoto (da λ 5000 a λ 2800) è la seguente:

In generale, ciascuna banda, espressa in numero di vibrazioni, è divisibile in serie di righe intrecciate, ciascuna serie essendo tale che gli intervalli successivi sono in progressione aritmetica. Le ragioni delle serie sono uguali o vicinissime. Con alcune bande, e colle bande del secondo gruppo dell' azoto in particolare, le differenze tra le posizioni delle righe calcolate e misurate sono tutte

inferiori alla ragione: anche talvolta la differenza media quadratica è al più eguale all' errore di puntata.

L'A. osserva che la legge precedente è sotto certi riguardi una legge differenziale: colla precisione attuale dei reticoli, essa non si applica esattamente che alle bande che hanno delle serie di meno di cinquanta righe. Colle bande straordinarie, aventi più di cinquanta righe, vi hanno delle differenze sistematiche notevoli relativamente alle progressioni. Questione questa che è stata trattata in una Memoria del Kayser e Runge (Memorie dell' Accademia di Berlino, 1899).

D' altra parte, l'A. rileva che la composizione e la forma degli aggruppamenti di righe simili, la cui ripetizione fornisce quelli spettri, sono variabili da uno spettro all' altro: esse sono direttamente legate alla struttura intima della molecola e saranno un giorno utilissime alla stereochimica.

Arsonval (D'). *Nuovo dispositivo elettrico per soffiare l' arco di alta frequenza* (pp. 323-324). — Per impedire la formazione dell' arco, che si forma fra le sfere dell' eccitatore, nelle applicazioni delle correnti di alta frequenza, l'A. aveva già indicato che si poteva soffiarlo o per mezzo d' un campo magnetico, o di una corrente di aria diretta proiettata sull' eccitatore, o per l' interposizione di una self o di un condensatore, o adottando un eccitatore che si spostasse rapidamente nell' aria, ecc. ecc.

Tutti questi processi però o non sono efficaci, o implicano la necessità di aggiungere agli apparecchi di utilizzazione degli organi meccanici che li complicano e richiedono una spesa di energia.

Per questo l'A. ha ideato un dispositivo che ripara a tutti questi inconvenienti, e che obbliga la corrente utilizzata a soffiare da sè automaticamente l' arco che tende a prodursi all' eccitatore. Il principio su cui riposa è il seguente:

Siano A e B le sfere dell' eccitatore corrispondente alle armature interne di due condensatori montati in tensione, e caricati periodicamente con una sorgente ad alto potenziale.

Quando i condensatori hanno una capacità e una self conveniente l' arco è soffiato automaticamente, e non apparisce se non quando l' apparecchio di utilizzazione è intercalato tra le armature esterne dei condensatori.

Ora l' idea dell'A. consiste nel mantenere costantemente in circuito un simile condensatore che egli chiama *condensatore soffiatore.*

Per azionare gli apparecchi di utilizzazione gli si aggiunge un secondo paio di condensatori, i quali possono essere assoluta-

mente indipendenti dai primi, coi quali hanno a comune il solo circuito dell' eccitatore A B. Ne risulta che qualunque sia l' arco che i condensatori di utilizzazione tendono a produrre fra le sfere dell' eccitatore quest' arco è costantemente soffiato dal condensatore soffiatore.

L'A. assicura che questo semplicissimo dispositivo è efficacissimo in tutti i casi, qualunque sia l' apparecchio di utilizzazione.

Arsonval (D') e Gaiffe. *Dispositivo di protezione per sorgenti elettriche alimentatrici dei generatori di alta frequenza* (pp. 325-326). — Allo scopo di impedire i danni prodotti dalle onde elettriche ad alto potenziale, che partono in tutte le direzioni dall' eccitatore, negli apparecchi elettrici del circuito, gli A. hanno pensato un dispositivo atto ad impedire il ritorno di quelle onde al trasformatore.

Il dispositivo in parola consiste nell' inserire tra il trasformatore e l' eccitatore, delle resistenze avvolte su spessi tubi di rame, e una capacità derivata ai serrafili di alta tensione del trasformatore.

Gli A. riferiscono alcune esperienze che mostrano l' efficacia di questo apparecchio smorzatore.

Bichat E. *Sul meccanismo di trasmissione dei raggi N per mezzo di fili di sostanze diverse* (pp. 329-331). — L'A. riporta una serie di esperienze atte a dimostrare che i raggi *N* sono trasmessi per mezzo di fili di diverse sostanze, in modo analogo a quello secondo cui la luce è condotta da un' estremità all' altra di un vetro ricurvo, per una serie di riflessioni successive.

Watteville (De) C. *Sugli spettri di fiamme dei metalli alcalini* (pp. 346-349). — Gli spettri delle fiamme dei metalli alcalini, (litio, sodio, potassio) si compongono delle righe delle seguenti lunghezze d' onda:

Litio: 6708, 6103, 4972, 4602, 4273, 4132, 3915, 3794, 3232, 2741, 2562.

Sodio: 5896 — 5890, 5688 — 5682, 4983 — 4979, 4669 — 4665, 4500 — 4994, 3303 — 330, 2852.

Potassio: 7699 — 7665, 5832 — 5812 — 5802 — 5782, 5359—5343— — 5340 — 5323, 5112 — 5099—5097—5084, 4965—4956 — 4952 — 4943, 4870 — 4863 — 4856 — 4850, 4047 — 4044, 3447 — 3446, 3217.

Dall' esame delle fotografie di questi spettri l'A. ha rilevato una particolarità interessante. Dal punto di vista delle loro inten-

sità, le righe di quei metalli si possono raggruppare in due categorie principali: quelle che sono ugualmente intense in tutte le parti della fiamma, e quelle che sono manifestamente più intense nella parte più bassa di essa. Così ha trovato che le righe della prima categoria sono quelle che appartengono alla serie principale dell' elemento considerato, mentre quelle del secondo gruppo si distribuiscono tra le serie secondarie.

L'A. osserva che questi risultati permettono di supporre che la fiamma sia divisa in regioni, ciascuna delle quali non emette che un gruppo di righe, e riporta quindi alcune esperienze confermanti questa ipotesi.

Osservando che questa divisione della fiamma in zone deve essere ravvicinata al fatto analogo scoperto dal Lenard nell'arco [1]), e tenendo conto delle esperienze sulla scintilla del Semenov [2]), l'A. ne deduce una similitudine tra il modo di emissione delle righe per parte della fiamma, dell' arco e della scintilla.

Questo insieme di fenomeni dà inoltre, secondo l'A., un appoggio alla teoria, secondo la quale la produzione delle righe spettrali è di ordine puramente calorifico. Questa teoria spiega, in particolare, perchè secondo Lenard, si trovino nell' arco, la cui temperatura è più elevata di quella della fiamma, più zone elementari, cioè più condizioni speciali nelle quali l' atomo è suscettibile di emettere una data serie di righe, di quelle che non presenti la fiamma.

P. Baccei.

---

1) Ann. der Phys. n. 7, 1903, p. 636.
2) C. R. 14 Aprile 1903.

Pietro Salvioni, *gerente responsabile.*

ALCUNE OSSERVAZIONI CRITICHE ED ESPERIENZE NUOVE RELATIVE AI FONDAMENTI DELLA SPETTROSCOPIA CELESTE,

del Dott. LUIGI PUCCIANTI.

Questo scritto, che è di fisica generale [1]) e niente affatto di astronomia, ha principalmente il fine di far conoscere quanto di discusso, di cambiato e di nuovo vi sia nelle cognizioni generali su cui lo spettroscopista deve ora fondare l' interpretazione degli spettri solari e stellari, e di persuadere il lettore come su tal punto, dopo tanto lavorio sperimentale, vi sia ancora grande bisogno di nuove esperienze dirette secondo i concetti nuovi.

Chi scrive si è da qualche tempo dedicato a tal genere di esperienze, alcune delle quali sono già state descritte in tre note precedenti [2]), e le altre saranno riferite in questo lavoro e in altri che egli spera di fargli seguire.

I fondamenti della spettroscopia celeste consistono nella conoscenza:

1.° *delle condizioni e proprietà dell'emissione dei gas,*

2.° *delle modificazioni della luce che traversa i gas,*

3.° *delle relazioni che passano tra questi due ordini di fenomeni.*

Sopra la emissione dei gas vi è una letteratura vastissima che io dovrei esporre in gran parte, se non fossero due larghe trattazioni riassuntive che me ne dispensano: il rapporto per il congresso di Parigi del 1900 di E. Pringsheim [3]) e le parti

1) È tolto per la maggior parte dalla tesi da me presentata alla commissione esaminatrice per la libera docenza in fisica.

2) *Metodo interferenziale per lo studio della dispersione anomala nei vapori.* Memorie degli Spettroscopisti italiani, vol. 33, p. 133, 1904.

Sulla fluorescenza del vapore di sodio. Rendiconti dei Lincei, vol. 13, (s. 5.) p. 433. — N. Cimento (s. 5.) vol. 8, pag. 427, 1904.

Spettri d' incandescenza dell' iodio e del bromo. Rend. dei Lincei, vol. 14, (s. 5.) p. 84, 1905.

3) Cong. Int. de Physique, vol. 2, p. 100 e seg.

che riguardano questo argomento nell' *Handbuch der Spectroscopie* di Kayser [1]).

Questa seconda trattazione completa, ordinata, pregevolissima per critica e dottrina profonda, possiede anche un'assoluta obiettività senza preconcetti che forse fa difetto all'altra.

Per quel che riguarda la emissione dei gas, il dare un cenno storico, dopo l'opera del Kayser, ho giudicato fosse lavoro tanto facile, quanto inutile, e rimando il lettore, senz'altro ad essa.

Supponendo dunque nota la letteratura, cercherò di discutere e riassumere i punti più salienti della questione: se e come i gas emettono radiazioni di temperatura, e mi sforzerò di separare, per quanto è possibile, il certo dall'incerto, ritornando sopra alcune conclusioni del Pringsheim.

È molto interessante in sè e intimamente connessa con questa quistione l'analisi del concetto di temperatura per le fiamme e in generale pei miscugli di gas, che reagiscono chimicamente tra loro; e merita trattenervisi alquanto, specialmente perchè, mi pare, non sono state prese in giusta considerazione le osservazioni molto acute di A. Smithells [2]) su questo punto.

Questo stesso modo di vedere fu trasferito alla teoria degli ioni da Stark, e da lui ultimamente applicata alla luminosità elettrica dei gas.

Quanto alle modificazioni della luce che traversa i gas (o se si vuole, alle loro proprietà ottiche) e alla relazione tra esse e l'emissione, vi è da tener conto di molti fatti e concetti nuovi [3]) che attirano vivamente l'attenzione dello studioso, promettendo da un lato cognizioni profonde e sintetiche, minacciando dall'altro di capovolgere alcuni princìpii ritenuti stabili per molto tempo.

Certo è che non ci possiamo limitare allo studio dell'emissione e dell'assorbimento, perchè anche la *dispersione anomala* in vicinanza delle righe e i fenomeni che si presentano

1) H. Kayser. *Handbuch der Spectroscopie*. Leipzig.
2) Phil. Mag. vol. 37, p. 245, 1894.
3) R. Wood. Phil. Mag.; vol. 3, p. 128, 1902; p. 359, 1902; p. 396, 1902; vol. 4, p. 425, 1902.

come di *fluorescenza* devono esser presi pure in considerazione dallo spettroscopista.

Anzi in questi ultimi anni W. H. Julius, seguito da altri fisici, propugna alcune geniali e ardite teorie, che modificherebbero profondamente tutte le idee comunemente accettate sulla costituzione del sole, facendo della dispersione anomala il nuovo fondamento della spettroscopia celeste.

Sarebbe del tutto alieno dall' indole della presente monografia l' addentrarsi nel campo estesissimo delle ipotesi, poichè si tratta di assegnare fondamenti a indagini sperimentali, e tali fondamenti non possono essere *ipotetici*, ma devono essere *positivi*.

Solo è indispensabile qualche considerazione fondamentale sulla teoria degli ioni e qualche schiarimento sulla risonanza.

Del resto me ne starò il più possibile alle esperienze.

I. — Sulla legge di Kirchhoff.

1. Da essa deve cominciare ogni trattazione di spettroscopia, sebbene, come mostreremo in questo studio, non le spetti più l' importanza che le si attribuiva in passato.

Per essa:

Quando non intervengano altre forme di energia che la termica e la raggiante, vale tra il potere assorbente A *di un corpo, il suo potere emissivo* E, *il potere emissivo del corpo assolutamente nero* ε, *la relazione*

$$E = A\varepsilon$$

per ciascuna lunghezza d'onda λ, *a ciascuna temperatura* Θ (scala assoluta).

E, A, ε sono tutte e tre funzioni di λ e di Θ.

Ora la funzione $\varepsilon(\lambda,\Theta)$ rappresenta una delle più importanti leggi della natura, e quindi il suo studio è stato oggetto di moltissime ricerche teoriche e sperimentali, le quali se non sono riuscite ancora a precisarla in modo assoluto, si può dire che a ciò si siano molto avvicinate [1]).

1) Cfr. O. Lummer. Rapp. Congrès. Int. d. Physique. Paris 1900.

$A(\lambda, \Theta)$ invece è essenzialmente connessa colla natura del corpo, ed è da notarsi che per essa ha in molti casi maggior peso la dipendenza da λ che quella da Θ. In altre parole si hanno per diverse temperature $\Theta_1, \Theta_2 \dots \Theta_n$ delle funzioni di λ

$$A_1(\lambda),\ A_2(\lambda) \dots A_n(\lambda)$$

che in molti casi sono quasi identiche tra loro [1]).

2. La dimostrazione di Kirchhoff è assai complicata e, se si vuole, un po' artificiosa, ma sarebbe, io credo, assai difficile darne una più semplice e ugualmente rigorosa. Qui voglio notare che quella, semplicissima, data dal Pringsheim [2]) manca di ogni rigore matematico.

Per dimostrare la prima parte che è come il lemma della legge di Kirchhoff che cioè:

In ogni spazio chiuso da un involglio impenetrabile al calore che si trovi a temperatura costante, la radiazione è indipendente dalla forma di questo spazio chiuso, e dalla natura dei corpi che vi sono contenuti, ma dipende solo dalla temperatura, il Pringsheim procede nel modo seguente:

Considera uno stesso corpo avente la temperatura Θ che venga portato successivamente in diversi di tali spazi chiusi, i quali si trovino pure tutti alla temperatura Θ, ed eguagliando (pel principio di Carnot) l'energia da esso assorbita con quella emessa in ciascuno, ne inferisce l'uguaglianza delle quantità d'energia ricevute dal corpo nei diversi spazi chiusi.

Cioè indicando con A il potere assorbente del corpo, e con $\varepsilon_1\, d\lambda,\ \varepsilon_2\, d\lambda, \dots\ \varepsilon_n\, d\lambda$ l'energia incidente su di esso per unità di superficie in ciascuno degli spazi chiusi, nell'intervallo spettrale da λ a $\lambda + d\lambda$, ottiene:

$$\int_0^\infty A\, \varepsilon_1\, d\lambda = \int_0^\infty A\, \varepsilon_2\, d\lambda = \dots \int_0^\infty A\, \varepsilon_n\, d\lambda\ .$$

Ora egli osserva che la scelta del corpo è in nostro arbitrio, e quindi (secondo lui) A è funzione arbitraria di λ, e con-

1) Ordinariamente si ammette che le variazioni di A con Θ sieno indizio di alterazioni nella intima costituzione della materia.

2) Pringsheim, l. c. pag. 101 e seg.

seguentemente, applicando un noto teorema di calcolo, da questa relazione tra gli integrali deduce senz' altro:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots\ldots = \varepsilon_n.$$

Ma non è esatto che A (λ) sia una funzione arbitraria, poichè potremo bensì scegliere il corpo, ma non fabbricarlo in modo che A (λ) abbia una forma preventivamente assegnata. Ora per la dimostrazione, e quindi per l' applicazione del teorema, è necessario ammettere che A (λ) si possa rendere piccola ad arbitrio dappertutto, salvo che in un tratto piccolo ad arbitrio nell' intorno di un punto pure arbitrario. E ciò equivarrebbe a dire che esistesse un corpo il quale presentasse una sola riga nel suo spettro, e che si potesse, variando in modo conveniente il corpo, far percorrere alla riga tutto lo spettro visibile e invisibile; ma tali corpi non si conoscono.

Per dimostrare la seconda parte, considerando un corpo dato qualunque avente il potere emissivo E in uno di questi ambienti, scritta la relazione:

$$\int_0^\infty E\, d\lambda = \int_0^\infty A\, \varepsilon\, d\lambda$$

il Pringsheim ne deduce subito

$$E = A\, \varepsilon$$

dicendo che E ed A sono funzioni di λ *tout à fait quelconques*.

Ma che vuol dir ciò?

Qui poi non vi è niente in nostro arbitrio; perchè A ed E devono considerarsi come funzioni assegnate, e non da scegliersi convenientemente, perchè esse si riferiscono al corpo per cui vogliamo fare la dimostrazione, e quindi l' essere questo corpo qualunque, costituisce una difficoltà di più e non un elemento di dimostrazione.

Non si può con tali argomenti passare dalla eguaglianza degli integrali a quella delle quantità sotto il segno, ma bisogna per far ciò introdurre nella dimostrazione altri elementi; e questo faceva il Kirchhoff fondandosi sopra proprietà delle

radiazioni che discendono dalla loro natura ondulatoria; mentre nella dimostrazione del Pringsheim non è introdotta in effetto l'ipotesi che si tratti di ondulazioni, e λ potrebbe indicare un parametro qualunque invece che la lunghezza d'onda.

Voglio credere che il Pringsheim stesso non abbia preteso di dare una dimostrazione rigorosa; ma allora non ne capisco l'utilità, anzi mi pare che essa sia atta a generare confusione nel lettore.

3. Della legge di Kirchhoff non abbiamo nessuna verificazione sperimentale esauriente, ma solo delle esperienze incomplete.

Le molteplici *inversioni* dello spettro che si sono riguardate in passato come la miglior prova sperimentale della legge di Kirchhoff, non possono essere altrimenti considerate come tali, poichè, come discuterò ampiamente in seguito, si possono avere indipendentemente da essa.

Vedremo allora che l'inversione dello spettro è da considerare come un fatto generale, e da spiegare col principio di risonanza, qualunque sia la specie dell'energia che si cambia in energia raggiante e viceversa. Esso è conseguenza della legge di Kirchhoff soltanto nel caso che questa energia sia termica, ossia si tratti di *radiazioni di temperatura*.

Per distinguere questo caso dagli altri prenderemo in esame i vari metodi ordinari usati per portare all'emissione i gas, affinè di appurare, fin dove è possibile, quale parte abbia in essi la temperatura.

Qui voglio esaminare se e come si possa ottenere dai gas con mezzi speciali e opportuni una emissione dovuta esclusivamente alla temperatura.

II. — Emissione di temperatura dei gas.

1. Giova osservare che è quasi impossibile, per la maggior parte dei corpi gassosi, portarli ad un'altissima temperatura in condizioni tali, da escludere con certezza l'intervento di azioni chimiche o elettriche ecc., e affermare che la sola energia cambiantesi colla raggiante sia la termica; che certo per far ciò non bisogna ricorrere nè a fiamme nè a scintille

elettriche e simili, perchè con tali mezzi l' energia termica stessa è prodotta in seno al corpo da quella elettrica o chimica, ed è quindi sempre possibile e ragionevole pensare, anche quando ciò non si possa provare con certezza, che una parte almeno dell'energia raggiante provenga direttamente, senza l' intermediario della termica, da quelle stesse fonti.

Soltanto con gas contenuti in un recipiente e riscaldati dall' esterno, possiamo cercare di riprodurre le condizioni della legge di Kirchhoff; e in alcuni casi tutto fa credere che ci si riesca effettivamente.

2. In questo indirizzo di studiare le proprietà spettrali di gas riscaldati in recipienti dall' esterno, le esperienze più notevoli sono quelle del Pringsheim [1]) e del Paschen [2]).

Il Pringsheim operava mediante una canna di porcellana posta in un fornello a gas, cercando di realizzare nell' interno di essa, ora il riscaldamento di vapori metallici in unione colla reazione chimica, ora il riscaldamento semplice. Egli ottenne sempre l' emissione o l' assorbimento delle righe, ma veramente assai più forte nei casi in cui l' azione chimica era più manifesta; e concluse che a questa sola fosse dovuto lo spettro a righe sia di emissione, sia di assorbimento, (perchè se si ammette che l' assorbimento sia termico, ossia l' energia assorbita si trasformi tutta in calore, si dovrebbe avere anche l' emissione di temperatura).

Effettivamente le conclusioni del Pringsheim sono parse a quelli scienziati che hanno trattato l' argomento dopo di lui affrettate e non pienamente giustificate dall' esperienza. Egli nel fatto non ci presenta un caso netto in cui si abbia vapore metallico semplicemente riscaldato, e non si veda la riga caratteristica che esso mostra alla stessa temperatura quando la reazione ha luogo.

Si tratta di righe che si indeboliscono bruscamente e molto quando si interrompe l' azione di riduzione che produce il vapore metallico. E resta sempre nel lettore il dubbio, che la

1) E. Pringsheim. Wied. Ann. vol. 45, p. 428, 1892; vol. 49, p. 347, 1893; vol. 51, p. 441, 1894.

2) F. Paschen. Wied. Ann. vol. 50, p. 409, 1893; vol. 51, p. 1, 1894; vol. 51, p. 40, 1894; vol. 52, p. 209, 1894.

vera causa non risieda nella cessazione del processo chimico in se stessa, ma nella diminuzione di densità del vapore metallico che ne consegue.

Il Pringsheim insiste molto sul fatto che la diminuzione (non mai scomparsa assoluta) avviene *bruscamente*, e non *gradualmente*, come se dovuta alla distillazione del vapore metallico verso la parte più fredda della canna. Ma confesso che questa distinzione fra *brusco* e *graduale* non mi pare abbia carattere abbastanza scientifico, per posarvi sopra una conclusione importante.

Le obiezioni di Büry [1]), che attribuisce l' indebolimento delle righe a riossidazione del vapore, non sono prive di fondamento, perchè la presenza di un' azione ossidante dovuta a tracce di ossigeno, in piccola scala, anche in ambiente riduttore, non è assurda, come non lo è la presenza in piccola scala di un' azione riducente in ambienti in cui prevalga l' azione ossidante (come p. es. ben mostra lo stesso Pringsheim la riduzione dei sali di sodio e litio ecc. nella fiamma non luminosa del becco Bunsen).

Non sodisfa nemmeno pienamente la spiegazione che il Pringsheim dà delle righe che restano in alcuni casi assai intense. Invero nessuno potrà escludere in quelle condizioni la presenza, almeno in piccolo grado, di reazioni chimiche anche arrestata la principale, ma il Pringsheim vuole specificare troppo, e immagina reazioni chimiche come la seguente: Sodio in vapore reagisce con silicato di sodio, producendo dell' altro sodio in vapore (di quello del silicato) e dell' altro silicato.

Ora l' immaginare un tale scambio come causa della riga spettrale mi sembra un far forza al buon senso. È, come osserva argutamente A. Smithells, [2]) « Un rubare a Paolo per pagare Pietro, piuttosto che la descrizione di un equilibrio chimico ».

Del resto in tutti i casi in cui il cambiamento chimico avvenga contemporaneamente nei due sensi in quantità uguali

1) Büry. Wied. Ann. vol. 52, pag. 205, 1894.
2) A. Smithells, l. c.

in modo da dar luogo a equilibrio, come per il caso di parziali scissioni di anidride carbonica, di vapori di iodio ecc. ... non vi è ragione di considerare la possibilità che la energia raggiante provenga dalla chimica, facendo un caso di eccezione alla legge di Kirchhoff; perchè a rigore la quantità complessiva di energia chimica che si trasforma è zero, e quindi le sole forme di energia presenti in modo da trasformarsi l'una nell'altra, sono la termica e la raggiante.

Solo bisognerebbe, se mai in questo caso, come pure faremo per le fiamme, discutere il concetto di temperatura.

Insomma il Pringsheim non dà prove certe della sua tesi, e conclude per la impossibilità di radiazioni pure di temperatura, solo perchè in alcuni casi la reazione è connessa colla presenza delle righe forti, e perchè egli non ha potuto realizzare un caso in cui non si possa, con un po' di buona volonta, invocare una reazione chimica per ispiegare la presenza delle righe.

Ma francamente, a me, come già al Paschen, sembra più probabile che in alcuni casi si trattasse di radiazioni di temperatura, ma sarebbe difficile darne una prova.

Con questa critica non voglio minimamente togliere al Pringsheim il merito di aver proposto e discusso con molto ingegno quistioni di grande interesse, e di avere coi suoi lavori, forse meglio di ogni altro, messo in guardia gli spettroscopisti contro applicazioni della legge di Kirchhoff abusive o non rigorose.

3. Al Paschen d'altra parte spetta il merito grande di avere per il primo messo in evidenza e fuori di dubbio dei casi di radiazione pura di temperatura data da corpi gassosi nella regione ultrarossa, descrivendo bolometricamente l'emissione dell'anidride carbonica e del vapor d'acqua, il loro assorbimento, le inversioni, le relazioni coll'emissione del nero fumo ecc. in una serie di ricerche delicatissime, nelle quali non saprei se sia maggiore la perfezione della tecnica sperimentale o l'interesse della materia.

Dopo lunga disputa fra il Pringsheim ed il Paschen, il primo pare abbia riconosciuto che veramente le radiazioni studiate dal Paschen fossero di temperatura; ma esse dànno

spettri di bande, che non si sa dicerto se sieno risolvibili in righe. Ora il Pringsheim fa una grande distinzione fra tali spettri e quelli di righe, per i quali sostiene ancora nel suo *rapporto* al Congresso di Parigi la sola origine di luminescenza.

Voglio notare che quanto alla emissione del vapore d'acqua e dell'anidride carbonica nelle fiamme, dovremo tornare sulla questione, ma quanto alla emissione di questi gas riscaldati dall'esterno, la quistione si può dire chiusa, risultandone la *possibilità dell' emissione di uno spettro a bande per temperatura.*

E per lo spettro visibile questa conclusione mi pare definitivamente messa al sicuro dalle ricerche del Konen e dalle mie [1]) sugli spettri di incandescenza dell'iodio e del bromo [2]).

Ma con queste esperienze il problema dell'emissione di temperatura è ancora lontano dalla risoluzione. Perchè la parte più importante e più difficile della questione, cioè quella degli spettri di righe, non è risoluta; e giova ripetere che se alcuni fisici hanno creduto di poterla risolvere in un senso, altri in un altro, volendo stare sul sicuro, bisogna dire *non esser certo che si possano avere spettri di righe per semplice effetto della temperatura, mentre che si possono con tal mezzo ottenere spettri di bande.*

4. La questione era a tal punto, quando è comparso recentemente un lavoro che se non la risolve, almeno le porta certo un contributo maggiore dei precedenti.

Nasini e Anderlini [3]) hanno riscaldato, a una temperatura elevatissima, in un tubo di carbone reso incandescente dalla corrente elettrica, aria con polvere di magnesio che era destinato a toglierle l'ossigeno; sicchè rimaneva l'azoto, mescolato però con una quantità piuttosto rilevante di vapore di magnesio e di altri metalli.

1) Io operavo con palloncini di quarzo fuso, materiale che a caldo è permeabile a parecchi gas il che potrebbe far pensare che qualche reazione chimica potesse effettuarsi nell'interno per penetrazione dei gas della fiamma; ma invero ciò mi pare impossibile trattandosi di bromo e iodio.

2) Vedi pag. 393, nota 2.

3) Rendiconti dei Lincei, vol. 13, p. 59, 1904.

Lo spettro, osservato con un mediocre strumento, mostrò parecchie righe, tra le quali tre presentano una coincidenza assai buona (relativamente allo strumento usato) con tre righe dell' azoto, quale si può produrre mediante le scariche elettriche. Gli autori della nota sostengono, e con ragione, che in questo caso l' invocare la luminescenza chimica od elettrica non sarebbe ragionevole; ma il punto della questione, a mio parere, più difficile, è se l' attribuzione delle righe all' azoto sia veramente sicura. Per due di esse si potrebbe trovare una coincidenza egualmente buona con righe del ferro, di cui, secondo gli autori, sono presenti già alcune righe.

Il dubitare di una coincidenza non è del resto, come potrebbe parere ad un inesperto di cose spettroscopiche, un imputare di poca accuratezza le misure, perchè spesso è necessario l' uso di spettroscopi estremamente potenti, per fare scomparire delle apparenti coincidenze, come quelle per esempio, su cui il Lockyer fondò la sua teoria delle *righe basiche*.

Prima di chiudere questo capitolo, voglio avvertire che avrei dovuto registrare qui una bella esperienza di Liveing e Dewar, in cui l' emissione era prodotta dai vapori metallici entro un tubo di carbone riscaldato elettricamente dall'esterno; ma preferisco lasciarla in compagnia di altre cui è naturalmente connessa, per parlarne nel capitolo sulla inversione dello spettro. Dirò soltanto che in queste esperienze in tubi di carbone per i vapori metallici, a differenza che per l' azoto, si potrebbe sempre pensare ad una reazione di riduzione come origine di luminescenza.

III. — Emissione delle fiamme.

1. Uno dei modi più semplici di studiare l' emissione dei corpi allo stato di vapore è quello di osservarli in seno alle fiamme, e comunemente in seno alla fiamma del becco Bunsen. In questo caso l' energia termica è fornita dall' energia chimica in seno al gas stesso emittente, e non vi è quindi ragione per ritenere *a priori* che sia soddisfatta la condizione della legge di Kirchhoff; e si presenta la quistione, se e quando l' emissione dipenda esclusivamente dall' alta temperatura, e

quando invece possa essere un' effetto diretto dell' azione chimica.

Che le azioni chimiche possano dar luogo a luce senza sviluppo di calore, o almeno di alta temperatura, è cosa notissima, e basta citare l' esempio del fosforo. Sono pure notissimi i fenomeni di luminescenza presentati da alcuni esseri viventi, specialmente da alcuni insetti, che hanno dato argomento a studi interessantissimi di Langley e Very; e tutti questi fenomeni sul cui meccanismo non si sa niente, mostrano che le cause da cui può esser prodotta la luce, oltre il riscaldamento, sono assai svariate.

Ora appunto niente ci induce a ritenere che in una fiamma in cui avvengono fenomeni chimici notevolissimi ed elettrici, la causa dell' emissione risieda nel solo riscaldamento.

Soltanto l' esperienza può dirci qualcosa su questo punto.

In oltre, la presenza delle reazioni chimiche porta alla necessità di modificare alquanto l' ordinario concetto di temperatura; tale modificazione fu proposta da A. Smithells nel secondo dei suoi belli studi sull' emissione delle fiamme [1]). Ma già concetti simili erano stati accennati dai due più insigni spettroscopisti inglesi [2]). Io qui svolgerò questi concetti con linguaggio un po' più rigoroso, per non dar luogo ad obiezioni fondate più sulle parole che sui fatti.

2. *Concetto di temperatura nelle fiamme.* — Temperatura di un corpo è la sua forza viva molecolare media, concetto che non si può rendere intuitivo altro che nel caso dei gas, secondo l' ipotesi cinetica.

In un gas in cui non avvengano reazioni chimiche, la legge di Maxwell rappresenta il caso più probabile della distribuzione delle forze vive molecolari, cioè il caso a cui ci si approssima indefinitamente appena il gas sia abbandonato a se stesso.

Ma se avvengono reazioni chimiche, è facile persuadersi che la distribuzione maxwelliana non è più possibile perchè

1) A. Smithells, l. c. — J. Stark. Ann. d. Phys. vol. 14, p. 506, 1904 è giunto, pare indipendentemente, alle stesse conclusioni per miscugli di molecole neutre ed ioni di varie specie sottoposti al campo elettrico.

2) Liveing e Dewar. Proc. Roy. Soc. vol. 44, p. 241, 1888.

le molecole prodotte dalla reazione e quelle che la alimentano hanno forze vive che si aggruppano intorno a due medie diverse.

Per mostrare più particolarmente quale concetto ci si deve formare della distribuzione delle forze vive molecolari in una fiamma, prendiamo un caso semplice, p. es. idrogeno che bruci in seno all' ossigeno. L' idrogeno arriva in presenza dell' ossigeno, ma ciò non basta perchè cominci la reazione: abbisogna per questo una certa temperatura Θ_1 (temperatura di accensione) raggiunta la quale, e ammettiamo per i due gas insieme, nel cono più interno della fiamma (a cui il calore è comunicato in un modo qualunque dapprima, e poi fornito dal processo stesso di combustione) si cominciano a formare delle molecole di vapore d' acqua secondo la formula:



$$O_2 + 2\,H_2 = 2\,H_2O\,;$$

e queste posseggono, oltre all' energia cinetica che era in quelle d' idrogeno e d' ossigeno, ancora quella proveniente dalla trasformazione dell' energia chimica, il quale ammontare di energia è ben conosciuto in base alle esperienze termochimiche.

Se quindi reagissero solo O_2 e H_2 in quantità equivalenti, e se le molecole di acqua formate non andassero soggette a parziale riscomposizione, e se mantenessero inalterata dopo la reazione la energia cinetica acquistata, esse avrebbero una forza viva molecolare media corrispondente alla temperatura

$$\Theta_2 = \Theta_1 + \frac{\text{calore di combustione}^{\,1)}}{\text{calore specifico di } H_2O}$$

che si può anche calcolare approssimativamente, ed è secondo lo Smithells 6.655°. E bisogna ammettere che nei primi istanti dopo la trasformazione, la forza viva molecolare corrispondente sia veramente posseduta dalle molecole di vapor d' acqua.

Ma tosto intervengono due fatti:

1° Le molecole formate cedono in parte la loro energia cinetica a quelle O_2 e H_2 che sopraggiungono, e altra ne per-

1) Riferito all' unità di massa di H_2O.

dono per altre vie, acquistando così forze vive corrispondenti a temperature sempre più basse;

2° Siccome la temperatura Θ_2 è superiore a quella a cui comincia la decomposizione del vapore d'acqua, così avviene che le molecole appena formate si decompongono in parte dando di nuovo molecole H_2 e O_2 con una diminuzione di energia cinetica corrispondente al calore assorbito nella reazione di scomposizione; cioè la loro forza viva media riprenderà all'incirca il valore corrispondente a Θ_1.

Avremo insomma nella regione della fiamma dove la reazione è più viva, due condizioni di molecole:

l'una è quella sia delle molecole che non hanno ancora reagito, sia di quelle che provengono dalla scomposizione e che sono anch'esse pronte per reagire di nuovo; l'altra è quella delle molecole che si sono formate dalla reazione da pochissimo tempo.

La forza viva media di queste ultime sarà superiore a quella delle prime, e queste forze vive medie corrisponderanno approssimativamente alle due temperature Θ_1 e Θ_2. Ma poi avremo ancora delle forze vive intermedie corrispondenti a molecole H_2O che hanno perduto una parte della loro forza viva.

Infine, procedendo dal cono interno all'esterno e dalla parte inferiore o media alla superiore della fiamma, troveremo che le molecole H_2 scarseggiano sempre di più e quelle H_2O avranno forze vive medie sempre più basse, finchè al di fuori della fiamma il prodotto di essa, in cui non avviene più alcuna reazione chimica, sarà costituito di molecole con distribuzione maxwelliana e con una temperatura non superiore a quella a cui si inizia la scomposizione pel vapor d'acqua.

La presenza dell'ossigeno in eccesso e dell'azoto, nel caso che la combustione avvenga nell'aria, non altera sostanzialmente il fenomeno: essi forniranno delle molecole la cui forza viva crescerà attraversando la fiamma per confondersi finalmente con quella che si ha nei prodotti della combustione.

Se per fissare le idee, consideriamo il caso di una fiamma con una sola reazione come la presente, la temperatura vera

nella regione di reazione più viva sarà data da

$$\Theta = \frac{K\left(\frac{\sum^{n_1} m_1 v_1^2}{2} + \frac{\sum^{n_2} m_2 v_2^2}{2}\right)}{n_1 + n_2}$$

ove m_1 e m_2 rappresentano le masse e v_1 e v_2 le velocità delle molecole dei corpi reagenti respettivamente e dei prodotti della reazione in numero respettivamente di n_1 e n_2, K essendo un coefficiente che dipende dalle unità di misura.

Ma potremo astrattamente considerare ancora le due altre temperature

$$\Theta_1 = K\frac{\sum^{n_1} m_1 v_1^2}{2\,n_1}$$

$$\Theta_2 = K\frac{\sum^{n_2} m_2 v_2^2}{2\,n_2}$$

Le quali a tutto rigore non saranno temperature realmente sussistenti, ma corrisponderanno alle forze vive medie dei corpi reagenti e dei prodotti della reazione, e Θ_2 sarà molto più elevata di Θ_1 e rappresenterà il più alto valore che la forza viva media dei prodotti raggiunge nella fiamma.

3. Se ora noi immaginiamo per un momento che i prodotti della combustione si possano da soli col riscaldamento dall' esterno portare alla temperatura Θ_2, e che essi siano capaci di una emissione di temperatura, è ragionevole pensare che essi emetterebbero in tali condizioni come emettono nella fiamma, e che alla temperatura Θ invece emetterebbero molto meno, e che anzi l' emissione potrebbe a questa temperatura non essere sensibile.

Ora, seguendo quest' ordine di idee, si giunge alla conclusione che si possono ripetere sulla temperatura Θ_2 le solite considerazioni termodinamiche, e dedurne, anche in questo caso, la legge di Kirchhoff con tutte le sue conseguenze.

Questo concetto che io dirò delle *temperature parziali,* proposto dallo Smithells, non è seguito dal Pringsheim, forse perchè la forma in cui fu da prima proposto, lasciava a desiderare dal punto di vista dell' esattezza del linguaggio

scientifico: perchè si parlava direttamente della temperatura delle molecole dell'una e dell'altra specie, come se queste temperàture sussistessero effettivamente e nel senso ordinario della parola.

Ma mi pare di aver mostrato che si può facilmente liberare questa teoria da tale inesattezza di linguaggio, giungendo alle stesse conclusioni. E si può dire che una fiamma va considerata come un miscuglio di gas a temperatura diversa, facendo però la riserva che in tale locuzione si dà alla parola *temperatura* un significato diverso dall'ordinario, e relativo ai concetti svolti sopra.

E qui voglio notare che, se veramente l'emissione dei prodotti della fiamma fosse di temperatura, si potrebbe colla misura quantitativa di questa emissione, confrontata coll'emissione del corpo nero, dare un fondamento sperimentale a questa estensione del concetto di temperatura.

E non si tratterebbe di un procedimento del tutto nuovo in questo ordine di ricerche, perchè i concetti attinenti alla temperatura si sono venuti recentemente perfezionando nello studio dei loro rapporti coll'energia raggiante. Di modo che il progresso della conoscenza sulla legge della radiazione e la realizzazione del corpo nero, fanno pensare che questo possa fornire un mezzo di misura della temperatura assoluta capace di rivaleggiare col termometro a gas, presentando su questo il vantaggio di essere rigorosamente libero dalla influenza della materia termometrica. E veramente le considerazioni del Wien sulla *temperatura* e sull'*entropia* delle radiazioni, che hanno il loro germe in una classica ricerca del Bartoli, hanno dato a questi concetti, ormai familiari, un carattere di maggiore esattezza, liberandoli dalla connessione strettissima che avevano colla materia ponderale.

4. Ma, tornando alla questione che ci occupa, dirò che la teoria dello Smithells basterebbe da sola a spiegare i fatti che hanno spinto a ritenere come luminescenza chimica la luce delle fiamme completamente gassose, cioè che:

a) Si osserva soltanto lo spettro dei prodotti della combustione e non quello dei corpi che l'alimentano.

Per esempio nel becco Bunsen, si osserva col bolometro l'emissione dell'anidride carbonica e del vapor d'acqua, e non quella del metano che pure ha un'assorbimento forte nell'ultrarosso (Julius, Angström, Paschen).

b) Un miscuglio di aria, di anidride carbonica e vapor d'acqua a una temperatura all'incirca uguale a quella della fiamma del becco Bunsen e con ispessore di 1,5 m. non dà emissione sensibile di radiazioni visibili secondo Siemens.

Basta ammettere che sia necessaria una temperatura elevatissima perchè l'emissione sia sensibile, e questa non possa esser raggiunta che come temperatura Θ_2 della fiamma.

In questo concetto *la radiazione è di temperatura; ma la temperatura è intesa diversamente dal solito.*

5. Si può invece dare l'altra spiegazione (più semplice ma che spiega meno) che cioè nella reazione che avviene nella fiamma vi sia sviluppo di luce, ossia che si abbia una vera e propria *luminescenza chimica.*

Le due interpretazioni in pratica si differenziano perchè la prima porterebbe ancora, in un certo senso, alla legge di Kirchhoff, la seconda no.

Noi non sappiamo se e quando sia il caso di ritenere giusta l'una o l'altra interpretazione, ma (se mi è lecito esprimere una mia impressione ricevuta dallo studio dei lavori di Paschen) mi pare che per l'emissione ultrarossa del becco Bunsen non vi sia ragione di ricorrere all'ipotesi della luminescenza.

Certo è soltanto questo, che colla sola considerazione della temperatura della fiamma nel senso ordinario della parola, e quale si può misurare colle pinzette termoelettriche e simili, non ci possiamo render ragione dei fatti esposti sopra e tanto meno delle fiamme fredde, ossia aventi una temperatura assai inferiore a quella di incandescenza, e che pure danno luce [1]).

6. *Fiamme contenenti vapori metallici.* — Ma tutto ciò ha un'importanza indiretta, riguardo alla interpretazione degli spettri di fiamme, come essi sono adoperati nella spettroscopia.

Infatti in generale si tratta di osservare le righe di un vapore metallico, di cui solo piccole tracce si trovano diffuse

1) Pringsheim, l. c.

nella fiamma; quindi la questione è assai diversa, e bisogna distinguere prima di tutto i seguenti punti:

a) Sceverare i casi in cui l'emissione sia dovuta al sale stesso, o all'ossido, o al metallo, come fa bene lo Smithells per i sali di rame.

Ora questa distinzione nella maggior parte dei casi si fa agevolmente, tanto più che sappiamo gli spettri di righe essere necessariamente dati da elementi.

b) Ricercare se per la formazione del vapore metallico o per l'emissione intervenga una reazione di riduzione, o semplicemente una dissociazione in conseguenza dell'alta temperatura.

Riguardo a questo punto il Pringsheim sostiene che sia necessaria la riduzione, fondandosi sulla osservazione propria, che cloruro o carbonato di sodio portati a temperatura elevatissima in seno ad anidride carbonica o azoto, non dànno le righe D nè per emissione nè per assorbimento, mentre queste righe si presentano vistosissime appena si introduca un gas riducente.

Tra le sue esperienze la meno attaccabile dalla critica è quella con cloruro di sodio in seno all'azoto, alla quale si potrebbe solo, volendo sottilizzare, obiettare che se l'azoto conteneva piccole tracce di ossigeno (il che non è difficile), questo poteva forse impedire la formazione del vapore di sodio dal cloruro per scissione. Ma tutto ciò è poco verosimile, e quindi l'ipotesi che l'azione riduttrice sia necessaria per produrre le righe, riesce molto confortata da questa esperienza.

Essa d'altra parte torna bene coi fatti osservati per le fiamme colorate, tra i quali ricordo i seguenti:

a) Il cono interno delle fiamme presenta le righe dei metalli, più facilmente della parte esterna.

b) Clorurando la fiamma si indeboliscono e si annullano anche le righe dei metalli alcalini date dai respettivi cloruri.

Certo più difficili a spiegare sono le differenze notevoli che si ottengono a seconda che il metallo sia portato nella fiamma, o introducendovi una perla d'un suo sale fuso, o iniettandovi una soluzione acquosa di un sale, ridotta in minutissime goccioline col polverizzatore di Gouy. Questo secondo

metodo permette di vedere in certe regioni della fiamma alcune *serie* di righe che non si vedono col primo metodo [1]); nè credo che a spiegare la differenza basti invocare una maggiore densità del vapore metallico.

Senza trattenermi più a lungo su questo punto di secondaria importanza, concluderò senz' altro:

È molto probabile che la riduzione abbia una parte importante nella produzione delle righe metalliche nelle fiamme, ma non si sa se essa abbia per effetto immediato soltanto di produrre il vapore, o anche di dare la luminescenza.

Nell' ipotesi che il vapore, per esempio, di sodio emetta per temperatura essendo prodotto per riduzione, sorge la quistione di sapere quale sia la *temperatura parziale* che gli va attribuita secondo il concetto dello Smithells.

Non ho trovato che questa questione sia stata discussa, e, francamente, mi sembra che non si saprebbe su che cosa fondare i ragionamenti per trattarla.

La emissione della fiamma corrisponderebbe per le righe del metallo (secondo tale ipotesi) ad una emissione di temperatura, ma la temperatura sarebbe del tutto sconosciuta.

Seguendo quest' ordine di idee, si giungerebbe a concludere che la questione della presenza o meno di luminescenza chimica nelle fiamme colorate sarebbe così complicata da disperare di risolverla.

Ma intanto l' esperienza potrebbe far conoscere forse leggi inaspettate.

Si potrebbe confrontare l' intensità delle righe con quella dell' emissione del corpo nero per la stessa lunghezza d' onda a varie temperature, e queste misure sarebbero in ogni modo di grande interesse, ma disgraziatamente mancano quasi affatto; e, per esempio, la conclusione che il Paschen trae da una sua esperienza, che cioè l'emissione del sodio nella fiamma sarebbe più intensa della corrispondente del corpo nero a uguale temperatura [2]), è dal Kayser rigettata, perchè in essa

1) C. d. Watteville. C. R. de l' Ac. d. Sciences, vol. 185, p. 1329, 1902; vol. 138, p. 346, 1904.

2) Nel comune senso della parola.

il Paschen aveva assegnato alla temperatura della fiamma del becco Bunsen un valore troppo basso.

IV. Eccitazione elettrica.

1. *Arco voltaico.* — Esso ha in spettroscopia un uso vastissimo sotto varie forme.

La più comune è quella dell' arco tra bacchette di carbone, nel quale si introducono in qualche modo i metalli di cui si vogliono ottenere gli spettri.

Sarebbe superfluo fare una descrizione dell' arco e ricordare che in esso la temperatura è troppo elevata perchè si possa conoscere bene.

Molti sperimentatori hanno cercato di determinare la temperatura delle estremità dei carboni dalla loro emissione, e queste determinazioni sono per necessità fondate sopra qualche ipotesi non giustificata (che il carbone sia a quella temperatura simile al corpo nero ecc.) e sopra una forte estrapolazione per la dipendenza della emissione dalla temperatura.

Non è quindi da farsi meraviglia se i diversi sperimentatori, a seconda delle leggi per questa dipendenza di cui si son valsi, hanno trovati valori differenti. Così per dare qualche esempio E. Becquerel indicò la temperatura 2070° per il carbone positivo, Rossetti 3900° per il carbone positivo e 3150° per il negativo, Abney e Festing 6000° per il positivo ecc. ...

I progressi delle cognizioni teoriche della legge dell'emissione fanno sì che al presente questa estrapolazione si possa effettuare in modo più razionale e meno arbitrario; e così Lummer [1]) assegna per il cratere positivo i due limiti superiore e inferiore respettivamente

4200 e 3750

della scala assoluta.

Ma vi è una strada del tutto diversa seguita dal Violle [2]) per determinare la temperatura del cratere: quella cioè di staccare improvvisamente l' estremo del carbone positivo e

1) Rapp. Cong. Int. de Physique, vol. 2, p. 96, 1900.
2) Journal de Physique, serie 3, vol. 2, p. 545, 1893.

lasciarlo cadere in un calorimetro, determinando così la quantità di calore che esso cede per raffreddarsi fino ad una temperatura nota. Si determina poi la massa del pezzetto distaccato, e, se si conoscesse bene il calore specifico, si potrebbe calcolare la temperatura con tutta sicurezza. Ma ecco che anche qui, in ultima analisi, è necessaria una estrapolazione, e il caso è complicato anche dal fatto che il carbone è uno dei corpi che seguono meno bene la legge di Dulong e Petit.

2. Violle ha studiato molto la questione, e il valore definitivo assegnato da lui [1]) è 3600° dalla fusione del ghiaccio (equivalente a 3873° assoluti), che appunto è compreso tra i limiti assegnati da Lummer.

Si vede dunque che per il cratere positivo la temperatura si conosce con buona approssimazione.

É poi messo fuori di dubbio che essa non dipende dall'intensità della corrente, ma solo dal carbone; è cioè il punto di volatilizzazione o di *ebullizione*; (come dice Violle) sebbene questa espressione non sia molto felice perchè non vi è a quanto pare stato liquido, ma dal solido si passa direttamente al gassoso.

È pure certo che la punta del carbone negativo è di alcune centinaia di gradi meno calda.

Ma quel che più importerebbe conoscere si è la temperatura dell'arco, e su questo appunto bisogna confessare che non sappiamo niente di positivo.

Già Violle, dopo avere osservato che le righe metalliche presenti in esso staccano in chiaro sullo spettro continuo dato dal cratere, avvertiva che ciò non prova niente riguardo alla temperatura, perchè non si sa se queste righe siano effetto di una emissione soggetta alla legge di Kirchhoff. Nè molto profitto egli ricavò dalla introduzione di una sottile verghetta di carbone in seno all'arco; perchè essa fa da carbone positivo rispetto al negativo e da negativo rispetto al positivo, e non da scandaglio di temperatura.

Anche se l'arco è preso tra due verghe metalliche, la bacchettina di carbone presenta lo stesso comportamento, ma

1) C. R. vol. 120, p. 868, 1895.

veramente, nel caso dell'arco tra verghe di zinco, il forte splendore della bacchettina, quando essa è dal consumo ridotta quasi a un filamento, fa pensare che la temperatura del vapore sia elevatissima, più elevata assai del punto di ebullizione dello zinco. Ma su ciò qual parte può avere l'ossidazione del vapore metallico?

Tutto considerato, il Violle conclude [1]) esprimendo l'opinione che l'arco sia più caldo del cratere, e credo che tale opinione sia generalmente accettata, e non solo per archi chiusi a modo di forno elettrico, come erano quelli su cui preferiva di operare il Violle, ma anche per archi all'aria libera.

3. Il Kayser nel suo Handbuch la dà come cosa certa, ma chi leggesse il libro *The electric arc* della signora Herta Ayrton (che è molto autorevole in materia) e stesse a quello, si formerebbe un concetto diverso, e, io credo, erroneo. Quindi non posso fare a meno di indugiarmi a discutere questo punto che, come vedremo tra poco, è di capitale importanza. La signora Ayrton, fondandosi sul fatto che la caduta di potenziale più repentina è nel primo strato dell'arco a contatto del cratere, e che è lì quindi anche la maggior produzione di calore, e volendo spiegare certe esperienze del Blondel che mostrerebbero lo *splendore* del cratere dipendere dalla lunghezza dell'arco, viene al concetto che il vapore di carbone che si sviluppa via via dal cratere, si raffreddi dopo un piccolo percorso, e si condensi (come fa il vapore di acqua che esce dalla bocca di un vaso bollente), formando così nel tratto che intercede tra il primo strato caldissimo accosto al cratere e la punta del carbone negativo, una nebbia finissima di particelle di carbone, che ella chiama *arc mist* [2]). Questo concetto è sostenuto dalla dotta signora in modo molto ingegnoso, ma poco persuasivo.

Per esempio, non è bene interpretato da lei il fatto che attraverso a una fiamma di candela non si possono distinguere dei caratteri altro che quando sieno molto vicini alla fiamma, o, se discosti, quando sieno fortemente illuminati.

1) C. R. vol. 119, p. 949, 1894.
2) *The electric arc*, p. 349 e seg.

Ciò in vero non dipende quasi per nulla dalla incompleta trasparenza della fiamma, sibbene dalla sua luminosità, che coprendo con un velo di luce uniforme la carta coi caratteri, rende insensibile il risalto se non è molto forte, cioè se la carta non è vivamente illuminata.

Quindi il ripetersi dello stesso fatto per l' arco non prova che questo sia poco trasparente, e anche se ciò fosse vero, resterebbe a vedere se non si trattasse, piuttosto che di una nebbia, di assorbimento corrispondente alle bande e righe che esso emette.

Nè il fatto noto della presenza dei corpuscoli nell' arco, che è bene messo in luce dall' esperienza di Herzfeld, che li attirava, e faceva deporre sopra lastre elettrizzate poste in vicinanza, non è da invocarsi qui, perchè manifestamente si tratta non di una fine nebbia di condensazione, ma di piccole faville staccatesi dai carboni.

Se la signora Ayrton avesse potuto eseguire l' esperienza che aveva pensata, di illuminare l' arco colla luce solare fortemente concentrata (metodo che serve così bene a mostrare la presenza del nero fumo nelle fiamme) credo che avrebbe ottenuto un resultato negativo, come l' ho ottenuto io dopo diversi tentativi fatti con una lente collettrice da lanterna per proiezioni e anche con un grande specchio concavo. Ma sono il primo a riconoscere che questo risultato negativo non prova niente, perchè neanche sul cratere positivo si riusciva a scorgere la macchia luminosa prodotta dai raggi solari, tanta è l' emissione e sì forte l' assorbimento del carbone a quella temperatura.

L' esperienza dell' ombra dell' arco (come la Ayrton stessa riconosce) non prova la presenza di questa nebbia; non solo, ma ripetendola mi sono piuttosto confermato nell' idea che la nebbia non esista.

L' esperienza si può fare nel modo ideato dal Mather, e indicato dalla signora Ayrton, colla luce della lampada stessa. A tal fine si ricevono sopra un piccolo specchio S, opportunamente disposto, i raggi del cratere di una lampada (coi carboni verticali e il positivo di sopra), e si rimandano indietro sulla loro strada (fig. 1).

Così l' ombra dei carboni e dell' arco si può ricevere in O sopra uno schermo di carta posto convenientemente in alto, che quindi è poco illuminato direttamente dalla lampada.

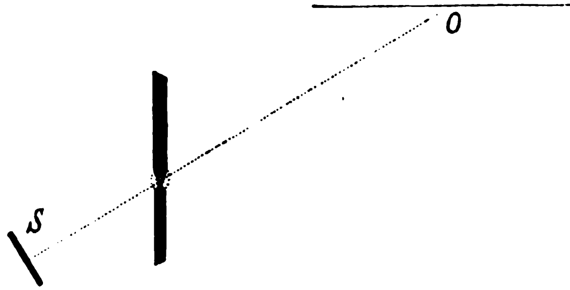


Fig. 1.

Del resto quando c' è il sole ho riconosciuto più vantaggioso proiettare l' ombra dell' arco coi raggi solari concentrati prima da una lente con distanza focale di 20 — 40 cm.

L' ombra dell' arco è una macchia oscura, ma orlata di chiaro che mostra cioè l' effetto come di una lente convessa a indice minore di *uno*. Essa è più estesa dell' arco vero e proprio, e comprende lo strato di aria calda che involge questo e i carboni, e non mostra nel suo interno nessuna parte più oscura del resto o di diverso colore, che possa far pensare all' ***arc mist*** (fig. 2).

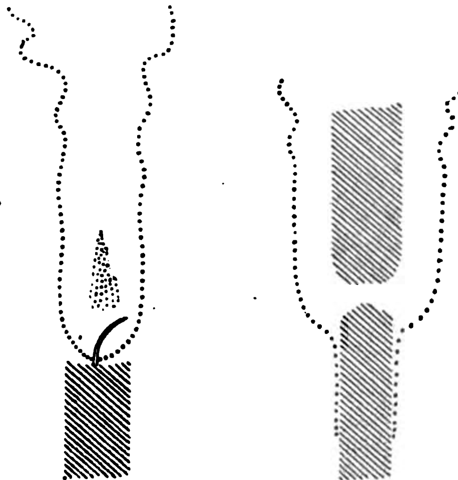


Fig. 2.

Se si colloca vicino all' arco una candela accesa, si vede sullo schermo la differenza tra le due ombre.

Quella della fiamma della candela mostra anch'essa un'orlo chiaro e un'estensione maggiore della vera fiamma, ma nel mezzo vi è una macchia oblunga terrea che corrisponde alla nebbia fumosa del cono luminoso della fiamma.

Insomma io non credo alla esistenza di questo vapore condensato in nebbia di particelle solide che costringerebbe ad ammettere nell'arco, tolto un sottile strato aderente al cratere, una temperatura non superiore al punto di volatilizzazione del carbone, cioè a quella del cratere stesso. E fino a prova in contrario, preferisco l'opinione più diffusa, che almeno il nucleo purpureo sia più caldo del cratere.

Bisogna però convenire che su questo punto non si può avere piena certezza.

4. Violle crede che la temperatura dell' arco non rimanga costante, come fa quella del cratere, ma aumenti colla intensità della corrente. Ciò è invero molto ragionevole, ma non certo, e non si può del tutto escludere l'opinione opposta sostenuta dal Rossetti [1]), che anche questa temperatura sia costante.

In ispettroscopia si introducono, con opportuni mezzi che non istò a descrivere, nell'arco dei vapori metallici e conseguentemente si complica il fenomeno. Invero è probabile che con ciò si abbassi la temperatura, perchè colla stessa forza elettromotrice e intensità l'arco viene più lungo.

Spesso l'arco si prende addirittura tra due bacchette di metallo, ed anche in tal caso la temperatura è a quanto pare elevatissima; e, ad esempio, per lo zinco secondo Violle supererebbe di assai il punto di ebullizione di questo metallo. È probabile però che si abbiano sempre temperature inferiori a quella dell' arco tra carboni.

Alcuni spettroscopisti usano archi formati nell'interno di blocchi opportunamente perforati di sostanze refrattarie, come calce o magnesia; e in tal caso la temperatura del cratere è la stessa, ma quella dell' arco deve essere maggiore, perchè il

1) Nuovo Cimento, (3), vol. 7, p. 200, 1880.

calore si disperde meno. Aggiungiamo ancora, che, siccome in seno all' arco avvengono pure reazioni chimiche, bisognerebbe a tutto rigore fare sulla sua temperatura delle considerazioni simili a quelle che abbiamo fatte per le fiamme, ma ciò sarebbe superfluo anzi illusorio, a causa della incertezza sul valore stesso della temperatura, tanto più che qui le reazioni rappresentano una fonte secondaria di energia.

Ma anche dal punto di vista puramente elettrico entrano in giuoco le temperature parziali. E bisognerebbe distinguere quella delle molecole neutre, quella degli ioni positivi (ai quali secondo J. Stark sarebbe da attribuire ogni spettro di righe) e quella degli elettronioni o elettroni negativi liberi.

Ma su queste considerazioni torneremo in seguito, poichè esse si applicano più chiaramente al caso dei gas rarefatti.

E ora voglio notare che le righe metalliche compariscono principalmente nella parte dell' arco più vicina al carbone negativo, specie per i metalli più elettropositivi, mentre le bande del carbonio sono più intense verso il cratere.

Vi è anzi trasporto di materia e specialmente di metalli dal positivo al negativo. Ciò suggerisce l' idea della conduzione elettrolitica, ma si può anche spiegare colla differenza di temperatura. Ad ogni modo il solo fatto che se uno dei carboni è impregnato, per esempio, di cloruro di sodio, l' arco è molto più conduttore, fa credere che quei vapori i quali dànno le righe, prendano parte attiva al meccanismo della conduzione.

5. Ma sarà questa partecipazione che direttamente produce la luminosità, oppure questa proverrà dalle reazioni chimiche che avvengono nell' arco, o solo dalla temperatura elevatissima? In altre parole, la emissione dell' arco è luminescenza elettrica, chimica o radiazione di temperatura?

Esaminiamo i fatti che militano in favore dell' una o dell' altra ipotesi:

Quelli che si possono invocare in sostegno della luminescenza sono i seguenti:

1° la grande intensità delle righe relativamente allo spettro continuo del cratere;

2° il rapido estinguersi di esse coll' interruzione della corrente;

3° la influenza che la presenza di un metallo esercita sulle righe di un' altro.

Il primo è quello che veramente ha peso maggiore, e ha spinto ad attribuire l' emissione alla luminescenza il Paschen e in passato anche il Kayser, ma questi ha poi mutato parere.

E veramente se le righe sono emesse per temperatura, la loro intensità non può mai superare quella di un corpo nero di uguale temperatura. Ora di quanto le righe superino di intensità la luce del cratere è mostrato con molta evidenza da questo esperimento del Kayser che trovo riferito e discusso dal Paschen [1]).

Il Kayser prese con un grande reticolo di Rowland due fotografie colla stessa posa nella regione intorno a 3800 U. A., la prima proiettando sulla fenditura l' immagine del cratere, l' altra proiettandovi la luce dell' arco contenente anche vapore di magnesio.

Le due lastre sviluppate insieme lasciavano vedere appena un oscuramento che poteva essere effetto di uno spettro continuo. Inoltre la prima mostrava una banda del carbonio, e la seconda questa e una tripletta del magnesio, e ciò con passabile intensità.

Ora, se fosse vero ciò che sostiene la signora Ayrton, che cioè nell' interno dell' arco si condensi il vapore di carbonio appunto ove sono più appariscenti le righe metalliche, si potrebbe senz' altro ritenere decisa la questione che ci occupa, perchè non si può pensare che il cratere emetta molto meno del corpo nero anche per la sua forma incavata, e bisognerebbe ritenere che le righe fossero effetto di luminescenza.

Ma abbiamo già detto che la temperatura di tutto il nucleo dell' arco è con più ragione generalmente ritenuta maggiore di quella del cratere, e il Paschen è pure di questa opinione; ma non crede che ciò basti a spiegare la grande differenza di intensità, e quindi si pronunzia per la luminescenza.

Invece il Kayser più recentemente nel suo manuale [2]) giudica l' esperienza come non provante.

1) Wied. Ann. vol. 51, p. 40, 1894.
2) Handbuch der Spectroscopie, Bd. 2, p. 169.

Egli dice : « poichè l' arco è veramente più caldo, e la radiazione, come noi sappiamo dalle ultime ricerche, cresce straordinariamente presto colla temperatura, così una differenza di 500° o 1000° può spiegare la differenza di intensità ».

6. Egli pure giudica non provanti le esperienze che mostrano come le righe cessino pressochè istantaneamente appena che la corrente sia interrotta, perchè questo fatto si spiega ugualmente bene ammettendo (il che del resto è naturale) un molto rapido raffreddamento dei vapori emittenti.

Anzi recenti esperienze sono state fatte da C. de Watteville colla corrente alternata [1]), ed hanno dato risultati molto interessanti. Esse consistono nel fotografare gli spettri corrispondenti a diverse fasi della corrente, il che riesce bene assicurando all' asse stesso dell' alternatore un disco portante alcune corone di fori che viene a trovarsi davanti alla fenditura dello spettroscopio. Or bene, confrontando gli spettri nel massimo e nel minimo, si vede che essi differiscono notevolmente, poichè nel minimo mancano le bande del cianogeno, e tra le righe metalliche rimangono con notevole intensità solo quelle che ordinariamente si sogliono chiamare *righe di bassa temperatura;* cioè quelle che più facilmente si producono con mezzi di riscaldamento meno energici.

C. de Watteville dice a ragione che tali fenomeni si spiegano bene col concetto di temperatura.

Credo che possa avere un certo interesse riprodurre una prova fotografica (Tav. II fig. 1) della parte più rifrangibile dello spettro ottenuta da me con questo metodo, usando carboni commerciali forati e rimpinzati di grafite con cloruro di stronzio. La corrente era prodotta da un convertitore rotante quadripolare Ganz, servito dalla corrente di città a 150 volta, sul cui asse era posto un disco di cartone con quattro fori che si poteva, senza arrestare la macchina, spostare a colpo di 45 gradi rispetto all' indotto. Così senza spengere l' arco, in pochi secondi ho preso su la stessa lastra le 4 fotografie alternativamente nella fase di massimo e di minimo o piuttosto (per esser rigorosi) nelle due fasi in cui lo spettro presenta la massima differenza.

1) C. R. vol. 138, p. 485, 1904.

Il lettore potrà da sè riconoscere che le variazioni alternative dello spettro sono in armonia con quanto è detto sopra.

Basta avvertire che sulla fenditura era proiettata un' immagine reale dell' arco, e che nella riproduzione furono tolti i due sottili spettri continui dovuti agli estremi dei carboni, e che la riga che rimane quasi invariata è quella dello stronzio di più bassa temperatura che si produce facilmente anche nella fiamma del becco Bunsen. Il fatto che alcune righe metalliche non si spengono e nemmeno s' indeboliscono molto nell' istante in cui la densità della corrente si annulla, mi pare che mostri la loro emissione esser dovuta, almeno in quell' istante, alla sola temperatura.

So benissimo che si possono invocare altre spiegazioni: che la luminosità persista per un piccolo tempo anche rimossa la causa, che intervengano azioni di riduzione, o che so io; ma la spiegazione più naturale sarà sempre quella data dalla temperatura più bassa, e pure sempre molto elevata.

7. Il Pringsheim, caldo sostenitore della luminescenza, dà molta importanza al terzo fatto citato che fu messo in chiaro da Liveing e Dewar nelle loro belle ricerche spettroscopiche.

Essi esaminano lo spettro dell' arco che si forma nell' interno di blocchi di calce o magnesia, raccogliendo i raggi nello spettroscopio attraverso a una perforazione, mentre un' altra serve a gettare nell' arco i sali o i metalli.

In queste condizioni si forma una massa assai densa di vapori a temperatura elevatissima, molto adatta alla osservazione spettroscopica.

Orbene, i due spettroscopisti osservano [1]) tra le altre cose, questo fatto interessante: alcune righe di un metallo compariscono o si rinforzano notevolmente quando viene introdotto nell' arco un' altro metallo; per esempio, il ferro ravviva alcuni gruppi di linee del calcio; il ferro e il cromo ravvivano alcune righe del nichelio e del titanio ecc.

Ora, questi fatti, secondo il Pringsheim, non si possono spiegare che colla ipotesi di una luminescenza chimica.

Ma veramente non ne hanno il carattere. La spiegazione

1) Proc. Roy. Soc. vol. 33, p. 428, 1882.

più naturale è quella suggerita dagli autori stessi, che la presenza di uno dei metalli agevoli la volatilizzazione dell'altro e ne difenda il vapore dalla ossidazione; così può essere aumentata la quantità del vapore emittente, e anche variatene le condizioni di densità e di temperatura.

In questo proposito mi è occorso di osservare il fatto curioso, che del resto probabilmente altri avranno osservato, che con un carbone positivo animato di un miscuglio di grafite e limatura di ferro, usato contro un negativo massiccio, si può ottenere del vapore di ferro spettroscopicamente più denso che coll'arco preso tra due grosse bacchette di ferro.

Ciò può dipendere o dalla temperatura più elevata, o dalla azione riducente del carbone.

Anche in altre esperienze [1]) degli stessi autori, non coll'arco, ma con vapori metallici riscaldati entro tubi in fornelli, si osservano fatti di questo genere che sono certo di grande interesse, ma non mi pare che costringano a pensare alla luminescenza chimica.

Tutto calcolato, si può dire che *manca una prova che nell'arco si abbia una luminescenza chimica od elettrica.*

Manca però anche una ragione sicura per escluderla, perchè le frequenti inversioni, che cita in questo senso il Kayser, veramente si accordano ugualmente bene, come vedremo in seguito, con qualunque ipotesi sulla origine della emissione, e neppure l'esperienza di Liveing e Dewar, già ricordata dell'emissione e inversione nel tubo di carbone, anche se rappresenta un caso di emissione pura di temperatura, non mostra che tale sia quella dell'arco.

8. Le lampade a vapori di mercurio che segnano il passaggio tra l'arco e le scariche nei gas rarefatti, rappresentano un caso troppo particolare relativamente alla questione generale di cui mi occupo; per questo mi limito a ricordarle, e passo senz'altro alle scariche elettriche.

Dell'immenso numero di lavori sperimentali relativo alle scariche elettriche la maggior parte hanno un indirizzo o puramente spettroscopico o puramente elettrico. Negli uni

1) Proc. Roy. Soc. vol. 27, p. 132; p. 354, 1878.

vien descritto accuratamente lo spettro della luce emessa dal tubo a vuoto o dalla scintilla, dando solo poche indicazioni rispetto alla parte elettrica; (se si usa o no un condensatore, se si inserisce o no uno spinterometro in serie col tubo). Negli altri si indicano gli elementi elettrici del circuito, si studia la ripartizione dell' energia, si indaga il meccanismo della scarica, senza fare uno studio spettroscopico della luce emessa.

Ricerche che uniscono lo studio spettroscopico a quello elettrico sono relativamente scarse. Ne viene di conseguenza che la parte energetica della emissione elettrica è ancora poco conosciuta.

Il meccanismo poi per cui i gas vengono portati all'emissione dalle scariche è molto oscuro, anche più di quello dell' emissione delle flamme.

È lecito sperare che anche su questi punti le modernissime teorie degli ioni porteranno molta luce.

9. *Gas rarefatti.* — Comincerò col richiamare il fatto che gli spettri dati dalle scariche (o correnti) nei gas rarefatti si distinguono in due tipi.

Quelli detti di *primo ordine* o di bande [1]), e gli altri detti di *second' ordine* o di righe. I primi corrispondono a una eccitazione meno viva (diciamo così) e i secondi a una più viva; per es. nei tubi di Plücker spesso i bulbi mostrano lo spettro di bande e il capillare quello di righe. Ma su ciò torneremo diffusamente in seguito.

Solo gli spettri di righe hanno vera importanza spettroscopica, o meglio, per la spettroscopia celeste.

Ciò non di meno voglio riferire, riguardo alla temperatura dei gas che emettono gli spettri del primo ordine, un resultato sperimentale ben netto dovuto principalmente a Hittorf [2]) e da lui ottenuto mediante l' uso della corrente di una pila.

1) Lo spettro di *prim' ordine* dell' idrogeno è impropriamente detto di bande: esso è invero costituito da molte righe fini senza ordine di serie.

2) Principalmente, perchè molti altri sperimentatori sono con lui concordi, e Wiedeman per altra via era già giunto a simili conclusioni; ma le esperienze di Hittorf sono le più importanti.

Wied. Ann. vol. 7, p. 553, 1879; vol. 19, p. 73, 1883.

10. E veramente siccome le scariche di un rocchetto durano sempre un tempo molto breve di fronte a quello che intercede tra l' una e l' altra, così non permettono una conoscenza diretta della temperatura che il gas può raggiungere momentaneamente al passaggio di ciascuna scarica.

Anche la misura del calore svolto e della durata della scarica non ci dice niente di certo sulla temperatura.

Per una corrente continua la temperatura sarebbe permanente, e riescirebbe meno difficile, se non farne una misura molto precisa, almeno poterne assegnare in modo sicuro l'ordine di grandezza. Orbene, coll' uso di una batteria voltaica se anche non si ottiene una corrente perfettamente continua, ci si avvicina abbastanza a questo caso, e per tal via Hittorf ha provato che l' emissione degli spettri di bande e di quello a molte righe, detto anche impropriamente di bande, dell' idrogeno non è di temperatura, e ciò colle seguenti esperienze:

Un piccolo tubo a vuoto veniva illuminato dalla corrente di una pila di un gran numero di piccoli elementi in modo che fosse quasi tutto invaso dalla luminosità positiva. Esso era connesso con un manometro a mercurio, costituendosi così una specie di termometro a gas. E veramente una elevazione della temperatura anche piccola veniva rivelata in questo modo, mediante una depressione del mercurio.

Nel fatto, per correnti relativamente deboli, il tubo si illuminava, e il mercurio non si abbassava sensibilmente; ed era necessaria una intensità maggiore per ottenere una depressione chiaramente visibile. Questa, del resto, era dovuta in parte all' espansione del gas nella regione oscura presso il catodo, in cui la temperatura era in quelle condizioni più alta.

Delle striscioline sottilissime di carta finissima, mantenute per del tempo nella luminosità positiva, non presentavano traccia di carbonizzazione [1]).

La luce è in questo caso adunque emessa a temperatura poco superiore alla ordinaria e molto lontana da quella di incandescenza.

1) Voglio citare soltanto le ricerche più particolareggiate sulla temperatura nei tubi di Wood, Wied. Ann. vol. 59, 1896.

Un solo dubbio che si può elevare, e che il Kayser accenna senza insistervi nel riferire queste esperienze, è che la corrente (come abbiamo accennato) non sia veramente continua.

L'Hittorf non mancò di esaminare la luce con uno specchio rotante che faceva fino a 100 giri il secondo, e constatò che la luminosità appariva intermittente se la resistenza posta in serie col tubo superava un certo limite, mentre, se era ad esso inferiore, la luminosità appariva continua, e ne concluse che allora doveva essere continua anche la corrente. Ma per noi basta ad ogni modo che fosse continua la luminosità. Che se poi si volesse pensare a intermittenze così frequenti da non potere esser risolute collo specchio rotante, come si potrebbe ammettere che per esse il gas si riscaldasse e raffreddasse alternativamente, e durasse ad esser caldo per un tempo molto breve di fronte a quello intercedente tra un riscaldamento e il successivo?

11. Ma v'ha di più: se il gas si riscalda molto sotto l'azione della corrente galvanica, non emette più luce, come risulta da quest'altra bella esperienza di Hittorf.

Egli faceva passare la corrente di una numerosissima pila attraverso a tubi contenenti gas rarefatti, crescendo via via l'intensità della corrente in modo da arroventare gli elettrodi sebbene fatti con asticelle piuttosto massicce.

Con elettrodi di platino potè spingere l'intensità fino al punto di incipiente fusione del catodo, e allora il gas intorno a questo presentava un ampio spazio oscuro. Con elettrodi di iridio potè açcrescere ancora l'intensità della corrente fino a incipiente fusione dell'anodo che questa volta si scalda più. Il gas (azoto, idrogeno, ossido di carbonio) rimaneva allora oscuro in tutto il tratto percorso dalla corrente.

E voglio anche ricordare le esperienze di Stark [1]) che riscalda il gas reso luminoso dalla corrente elettrica ad alta tensione, con filamenti da lampada resi incandescenti da una corrente più intensa a bassa tensione; ed osserva che la luminosità si indebolisce e scompare in vicinanza di questi filamenti. Egli toglie assai bene il dubbio che tale effetto sia

1) Wied. Ann. vol. 68, 1899.

dovuto, invece che al riscaldamento del gas, a una emissione di vapori dal filamento incandescente.

Per gli spettri di bande adunque non si tratta di emissione di temperatura, che anzi per l'emissione è necessario che la temperatura non sia troppo elevata.

Risulta inoltre dalle esperienze di Hittorf che azoto, idrogeno e ossido di carbonio, riscaldati a una temperatura vicina al punto di fusione dell'iridio, non emettono ancora, almeno con piccoli spessori; e ciò non è certo favorevole alla possibilità per questi gas di una emissione di temperatura.

12. Ma con ciò non è deciso ancora il punto principale, cioè qual parte possa avere la temperatura nell'emissione degli spettri di secondo ordine che sappiamo esser dovuti ad eccitazioni più vive, non ottenibili per i gas studiati da Hittorf colla corrente continua; e non si può escludere assolutamente che ad esse possano corrispondere delle temperature anche molto superiori a quelle ottenute dall'Hittorf colle correnti continue.

Veramente talvolta le righe dell'idrogeno che costituiscono lo spettro di 2° ordine erano debolmente visibili nelle esperienze dell'Hittorf; ma neanche questo fatto può mostrare che esse sieno un effetto di luminescenza, quando sono sole, o spiccano in modo speciale nello spettro di bande.

Qui la questione si complica enormemente; e mi è forza di esaminare un po' più da vicino le condizioni che dànno luogo all'uno e all'altro tipo di spettri.

13. Contro l'idea che gli spettri di righe sieno dovuti a temperature più elevate che quelli di bande, si cita una esperienza di D. van Monckhoven [1]) il quale, in un tubo di azoto a forma di H munito di quattro elettrodi, manda le scariche semplici di un rocchetto e le condensate di un altro.

Le prime dànno lo spettro di bande, le altre lo spettro di righe, e questi due spettri si vedono sovrapposti, osservando il tratto che riunisce le due aste dell'H. Da ciò egli conclude che l'emissione dei due spettri, essendo contemporanea, non può essere legata a due temperature diverse.

1) C. R. vol. 95, p. 520, 1892.

Ma le due scariche non sono perfettamente contemporanee; e il van Monckhoven si schermisce da questa obiezione affermando che la luminosità dura nei tubi specialmente di ossigeno (ma egli intanto adopra l'azoto) qualche decimo di secondo dopo il passaggio della scarica.

Tutto ciò non è molto persuasivo.

Se la persistenza della luminosità esistesse veramente nel senso e nella misura detta dall'autore, visto che, sia per la produzione dello spettro di bande, sia per la produzione dello spettro di righe, il tubo non si riscalda molto anche con un'interruttore assai rapido, basterebbe ciò a mostrare che in tutti questi casi l'emissione non è di temperatura.

14. Ma la cosa è assai diversa: la luminosità data dalla scarica si estingue tosto, quasi totalmente, e rimane, è vero, una luminosità residua per qualche tempo, ma essa è molto debole, e non permette di asserire che nelle esperienze del van Monckhoven le due emissioni sieno contemporanee. In vero, osservando con uno specchio girante dei tubi di Plücker alimentati da un rocchetto di Rumkhorf con interruttore assai rapido, ho notato facilmente quanto segue:

a) Adoperando un tubo di ossigeno di fronte al quale si poneva un diaframma a iride a diverse altezze per limitare via via la parte presa in esame, si vedeva nello specchio girante una serie di immagini corrispondenti alle varie scariche connesse tra loro da un nastro continuo, il quale è più visibile per le ampolle che per il capillare, forse soltanto a causa della maggiore larghezza della immagine.

b) Con un tubo di azoto questo nastro continuo è pure visibile, ma a gran fatica, ed ha un'intensità estremamente minore delle immagini staccate, le quali sono sempre a contorni molto netti, anche se lo specchio si fa girare presto in modo da separarle molto le une dalle altre.

Si può quindi affermare che, se si osservasse il tubo del Monckhoven collo specchio girante, si vedrebbero staccate le immagini corrispondenti alle due specie di scariche sopra un nastro continuo debolissimo.

E quindi, qualunque sia poi la causa di questo nastro continuo, si vede che l'esperienza del Monckhoven non è decisiva.

Del resto è cosa notissima che spettri di primo e di secondo ordine *colla stessa scarica* si osservano comunemente nei tubi di Plücker; per esempio con un tubo di idrogeno è facile vedere le quattro righe caratteristiche risaltare in modo speciale sopra un fondo di un numero grandissimo di righe fini e deboli. Ma anche qui si potrebbe sottilizzando sospettare che lo spettro di secondo ordine si avesse solo nell'istante della maggior temperatura, e quello di primo ordine solo quando la temperatura decresce.

Con questo non voglio sostenere che lo spettro di righe sia dovuto alla temperatura, e nemmeno che necessariamente sia accompagnato da un' alta temperatura; solo voglio affermare che dalla esperienza del v. Monckhoven sopra descritta non si ricava nessuna prova della tesi da lui sostenuta.

15. Ma in che cosa risiede dunque la causa della differenza? Non certo, almeno in generale, nella dissociazione della molecola in atomi liberi. E veramente, senza che si possa escludere che questa dissociazione possa in alcuni casi manifestarsi col cambiamento di spettro, sebbene ciò non paia adattarsi al caso delle scariche, basta citare il fatto di gas monoatomici come il mercurio [1]) e l' argo che presentano i due spettri, per mostrare che le cause di questo fenomeno, importantissimo nella spettroscopia, vanno ricercate in linea generale, non nelle associazioni o dissociazioni *chimiche*, ma nel meccanismo stesso della emissione, il quale è connesso intimamente e forse è la stessa cosa col meccanismo della conduzione nei tubi di Plücker [2]). Non si può dunque sperare di farsi un concetto chiaro del lato spettroscopico del fenomeno, sino a che non ci saremo fatti un concetto chiaro del lato elettrico, e sarebbe superfluo citare i fenomeni magneto-ottici, specialmente quello di Zeeman, per mostrare come ormai bisogna ritenere che la minima particella carica di elettricità sia la causa identica della conduzione elettrica e della emissione di luce. In fine a questo capitolo parlerò brevemente della teoria degli ioni in relazione colla luminosità elettrica.

1) Eder e Valenta. Wied. Ann. vol. 55, p. 479, 1895.
2) Trowbridge e Richards. Phil. Mag. (5), vol. 43, p. 77, 1897.

Ma intanto citiamo alcuni fatti cercando di dedurne qualche conclusione riguardo alla temperatura.

16. Pare che in molti casi la causa principale che determina il carattere dello spettro sia la natura della scarica, oscillatoria o no, e ciò apparisce specialmente dimostrato con mezzi grandiosi nelle esperienze di J. Trowbridge in unione anche con Richards [1]).

Il gas che mostra la differenza di contegno più spiccata è l' argo, che dà lo spettro rosso per le scariche e correnti continue, e l'azzurro per le scariche oscillatorie; anzi un tubo ad argo convenientemente preparato può servire per riconoscere se un oscillatore sia veramente tale, semplicemente avvicinandolo ad esso, ed osservando il colore con cui si illumina (talantoscopio). Anche l' azoto e l' idrogeno mostrano tale comportamento, se non colla stessa evidenza. Tra le osservazioni in proposito voglio riferire la seguente:

Un tubo di Plücker, ripieno di idrogeno, quando era percorso da correnti continue, produceva lo spettro di righe fini, e qualche riga più intensa, tra cui le quattro caratteristiche (corrispondenti a C, F, *f*, *h* di Fraunhofer) erano presenti senza spiccare per niente. Inserendo un condensatore di grande capacità, la luce cambia colore, e lo spettro si trasforma in quello delle sole quattro righe, che corrisponde allo spettro azzurro dell' argo. Quello che è più caratteristico in questo cambiamento è la scomparsa dell' *esercito* di tutte le altre righe sottili. Smorzando queste scariche oscillatorie, queste righe sottili ricompaiono in parte. Ma pare che il tipo di spettro continuo si abbia anche inserendo una grande autoinduzione, cioè con oscillazioni lente; nè ciò mi sembra strano perchè se le correnti hanno una certa durata, si capisce come poco importi se sono dirette sempre in un senso, o se cambiano alternativamente direzione.

Corrispondentemente a queste differenze ve ne è una anche nella resistenza. Per determinarla nel caso delle scariche oscillanti, Trowbridge e Richards fanno le fotografie col meto-

1) Phil. Mag. (5), vol. 43, p. 77, p. 135-349, 1897. Vedi ancora Phil. Mag. (5), vol. 50, p. 888, 1900; (6) vol. 2, p. 870, 1901 ecc.

do di Feddersen, esaminando lo smorzamento prodotto dal tubo e quello prodotto da resistenze di filo di manganina, ed assegnano per la resistenza del tubo lo stesso valore di quella del filo, che produce lo stesso smorzamento.

La resistenza dei fili è misurata col metodo del ponte. Ora questo modo di determinare le resistenze per le scariche oscillatorie non è rigoroso, perchè la resistenza del filo è a causa dell'effetto di superficie, ben diversa per queste che per la corrente continua. I valori ottenuti saranno quindi da considerare come un'approssimazione un po' grossolana, ma bastante per non lasciare dubbio sul fatto che, mentre la resistenza per la corrente continua è di migliaia di ohm, quella dello stesso tubo per le scariche oscillatorie è di qualche ohm solamente.

Trowbridge e Richards pare che sostengano aversi in corrispondenza per le scariche oscillatorie una temperatura molto maggiore. Ma senza seguirli in questo ordine di idee che non mi sembrano pienamente giustificate, dirò solo che: *i due tipi di spettri di primo e di secondo ordine corrispondono a due diverse specie di scariche e a due diverse resistenze* [1]) *del tubo, cioè probabilmente a due meccanismi di conduzione diversi* i quali in alcuni casi si possano anche sovrapporre.

E se gli spettri di prim'ordine sono dati dalla luminescenza, potremo ritenere probabile che lo siano anche gli altri; ma, a causa delle differenze dette sopra, non potremo asserirlo; tanto più che molte esperienze, e specialmente di Trowbridge stesso, mostrano come in certi casi (di scariche molto energiche) non si possa dubitare che gli spettri di secondo ordine sieno prodotti da gas a temperatura molto elevata.

Ma la quistione si può risolvere per altra via, che però è vincolata alla ipotesi cinetica dei gas.

Il movimento termico delle molecole (in questo caso la parola *molecola* è consacrata dall'uso) produce per l'effetto di Doppler un allargamento della riga spettrale. Ma altre

1) La parola non va presa in senso stretto.

cause possono aumentare tale allargamento; sicchè dalla larghezza non si può in ogni caso dedurre che un limite massimo per la velocità molecolare, e quindi per la temperatura.

La teoria di questo fenomeno è stata tentata da H. Ebert, e poi trattata esaurientemente da Lord Rayleigh [1]), però non riferendosi propriamente alla larghezza delle righe, ma ciò che in sostanza fa lo stesso, alla visibilità delle frangie di interferenza con gran differenza di cammino.

Ed esperienze delicatissime di Michelson [2]) eseguite col suo interferenziometro, gli hanno permesso di assegnare il limite minimo della velocità media molecolare di parecchi vapori e gas eccitati elettricamente in corrispondenza alle varie loro righe.

Si tratta di quelle righe sottilissime capaci di interferire con differenze enormi di cammino, che si possono applicare, alla metrologia.

Orbene, le temperature corrispondenti non sono notevolmente diverse dalle ordinarie. Cioè bisognerebbe assolutamente escludere la emissione di temperatura in questi casi.

17. Tra le molte esperienze sull'argomento ho scelto queste poche, e le ho riferite con una certa ampiezza, perchè mi sembrano le più adatte a fissare le idee e i termini del problema dell'emissione pei gas rarefatti.

Ve ne sono molte altre assai importanti che io tralascio per non dilungarmi troppo, poichè tra esse non ne ho trovata alcuna che fosse per gli spettri di righe decisiva, come sono quelle di Hittorf per gli spettri di bande, cioè che fornisse una prova certa che anche essi siano effetto di luminescenza.

18. *Scintille.* — Sebbene si passi per gradi dall'uno all'altro fenomeno, pure una differenza profonda vi è tra le scariche nei tubi di Plücker e la scintilla, differenza costituita dalle righe metalliche, le quali sono presenti nello spettro di questa.

E qui fortunatamente il fenomeno si conosce assai meglio. Le ricerche di molti fisici [3]) specialmente per effetto del po-

1) Phil. Mag. (5), vol. 27, p. 298, 1889.

2) Phil. Mag. (5), vol. 34, p. 280, 1892.

3) Feddersen, Boys, Trowbridge, Lodge, Heidweiller, Cardani, Battelli e Magri ecc.

tente istrumento di indagine che è lo specchio girante, ci hanno insegnato molto del meccanismo, almeno esteriore, di queste scariche.

Tutti sanno che a seconda delle grandezze dei tre elementi elettrici del circuito, resistenza, autoinduzione e capacità, si hanno i tipi oscillatorio e continuo, o intermittente, e in corrispondenza condizioni alquanto diverse dei gas emittenti.

19. *Scintille oscillanti.* — Il caso più importante e più studiato è quello delle scariche oscillanti, e anche dal punto di vista nostro, mi pare il più istruttivo. Per noi hanno speciale interesse le ricerche di Schuster e Hemsalech [1]) che hanno fatto con belle esperienze uno studio approfondito spettroscopico ed elettrico. Alle loro conclusioni devo fare alcune modificazioni ed aggiunte, richiamando cose che non giungeranno certo nuove a chi abbia familiarità colle fotografie delle scintille; ma ciò pure è necessario per delucidare la questione dell' emissione luminosa.

Anzi voglio cominciare colla descrizione dei tipi più spiccati di scintille oscillatorie, servendomi di alcune belle fotografie gentilmente favoritemi dai signori A. Battelli e L. Magri.

20. Esse sono state ottenute colla disposizione descritta nella memoria « *Sulle scariche oscillatorie* » [2]).

Gli elementi che lasciano tracce visibili nella lastra fotografica sono:

a) La scintilla detta *pilota* in cui passa una piccola parte della carica, cioè quella che si trova distribuita sui conduttori più vicini allo spinterometro. Essa apre la strada alla scarica del condensatore (prima striscia sottile).

b) Le successive scariche parziali traverso il gas interposto agli elettrodi (strisce diritte o serpeggianti più larghe).

c) I punti degli elettrodi resi incandescenti (lineette orizzontali).

d) I vapori metallici [3]) emanati da questi (strisce incurvate).

1) Schuster e Hemsalech. Phil. Trans. A. 193, p. 189, 1900. — Hemsalech " Recherches experimentales sur les Spectres d' Etincelles ", Paris, Hermann 1901.

2) Accademia delle Scienze di Torino (Memorie), 2, 51, 1902.

3) La scintilla era presa tra punte di cadmio.

Tutti questi elementi sono visibili nelle figure 1 e 2 Tav. I (Autoinduzione L = 92.000 cm., capacità C = 0,00399 microfarady, periodo 0″,00000 38 calcolati).

Delle scariche parziali se ne vedono però due soltanto.

Invece la 3 (L = 20.100 C = 0,00399 T = 0,00000178 calcolati) mostra un numero maggiore di scariche parziali, ma il pilota si confonde colla prima di queste.

I punti incandescenti dell' elettrodo e i vapori metallici sono visibili distintamente soltanto via via per l' elettrodo che fa da positivo.

Queste scariche parziali adunque si rivelano per una illuminazione quasi istantanea del tratto di gas compreso fra i due elettrodi.

Esse non possono contenere ancora i vapori metallici, perchè questi si sviluppano dagli elettrodi, e si avanzano con velocità piccole, relativamente a quella di propagazione delle scariche nell' intervallo esplosivo.

I vapori metallici invece si mostrano, come ho detto, nelle strisce che partono dall'elettrodo negativo prevalentemente (N. 5), o esclusivamente (N. 1, 2 e 3), le quali col loro incurvamento mostrano che il moto dei vapori metallici è ritardato.

Esse si intersecano tra loro a forma di spiga, e vanno ciascuna gradatamente diminuendo di forza; e non si osserva nè in queste riprodotte nella tavola, nè in nessuna delle molte fotografie di scariche di periodi svariatissimi da me esaminate, un rinvigorimento di alcuna di queste strisce in corrispondenza ad ogni scarica parziale successiva.

Questo fatto ha per me molto interesse, in quanto che mostra come l' energia che i vapori emettono è loro comunicata tutta in una volta da quella scarica parziale che li distacca dagli elettrodi, e non viene aumentata di altri contributi dalle successive scariche parziali, al cui meccanismo i vapori metallici rimangono estranei, o almeno non manifestano la loro partecipazione con un aumento di luce.

Delle strisce date dalle scariche parziali, in molte fotografie è poi presente solo la prima, specie se la distanza esplosiva è piccola. Se poi lo smorzamento è piuttosto rapido, spesso i vapori seguitano a emettere luce anche dopo che è

cessata la scarica per molti milionesimi di secondo, lasciando una lunga coda sfumata come mostra la fotografia della fig. 4.

Con grandi autoinduzioni e periodi piuttosto lenti, le nubi di vapore prendono ancora più importanza relativamente alle strisce, e finalmente si giunge a scariche come quella della fotografia della fig. 5, in cui è visibile solo la scintilla pilota e le nubi di vapore, sempre più deboli, per l'elettrodo negativo, e non sono visibili le scariche parziali nell'aria.

I ciuffi di vapore non vanno dall'uno all'altro elettrodo, come se conducessero essi la scarica, ma talvolta rimangono a mezza strada N. 1, 2 e 3, tal'altra si spingono anche più in là dell'altro elettrodo, uscendo dal vero e proprio intervallo di scarica o deviano enormemente (fig. 5) e talvolta persistono anche quando la scarica è cessata (fig. 4 frequenza altissima).

21. Dunque i fenomeni luminosi della scintilla sono di due sole specie ben distinte:

a) *Quelli provenienti dal gas*, che dànno luogo ai tratti sottili nelle fotografie. Essi seguono istantaneamente o quasi i fenomeni elettrici che li producono, perchè ogni riga corrisponde anche con periodi brevissimi a una scarica parziale, e in alcune fotografie dei signori Battelli e Magri si notano queste strisce delle scariche parziali succedersi a meno di un milionesimo di secondo l'una dall'altra.

Questi fenomeni sono adunque un indice ottico diretto del meccanismo di conduzione della scintilla.

b) *I fenomeni luminosi dei vapori metallici.* La loro emissione va gradatamente e molto lentamente spengendosi dall'istante in cui essi si sprigionano dall'elettrodo; non viene ravvivata dalle successive scariche parziali; si manifesta in luoghi e in tempi in cui manca la scarica elettrica, e quindi non può essere considerata come indice ottico del meccanismo di conduzione, col quale non ha altro rapporto che l'origine dei vapori e dell'energia.

Ne viene di conseguenza che, dopo l'ultima striscia trasversale visibile, il meccanismo di conduzione si svolge nella scintilla senza dare di sè direttamente un indizio luminoso.

Questi i fatti che cercheremo di interpretare più giù: ora riferiamo i principali risultati spettroscopici che vi sono connessi.

22. È chiaro che, osservando allo spettroscopio i diversi elementi che abbiamo visto costituire la scintilla, si riscontrerebbe per le strisce diritte trasversali, corrispondenti alle scariche parziali, lo spettro dell' aria, e per le strisce incurvate nebulose, lo spettro dei metalli.

Schuster e Hemsalech appunto proiettarono sopra una pellicola fotografica rotante lo spettro delle scintille ottenute con circuiti di scarica di piccolissima autoinduzione, aventi pochissime oscillazioni molto rapide (essi le chiamano scintille ordinarie), nelle quali la prima scarica nell'aria aveva molta importanza. Essi ottennero nella fotografia le righe dell'aria diritte e nette, e quelle del metallo incurvate ed espanse assumendo la forma simile a quelle che si osservano nelle fotografie riprodotte sopra.

Fecero anche dal loro incurvamento la misura approssimativa della velocità dei vapori metallici. Si resero ragione benissimo del fatto che con grandi autoinduzioni le righe del metallo sono sole. E invero nell' ultima fotografia da me riprodotta (N. 5 $L = 515.300$ cm., $C = 0,109$ microfarady, $T = 0'',0000473$ calcolati) la quasi totalità dei fenomeni visibili è data dai vapori metallici.

Molti resultati interessantissimi delle loro ricerche mi piacerebbe qui riferire, se ciò non mi dilungasse dal mio argomento; ma invece sono costretto a discutere un punto, in cui mi permetto di dissentire da essi e specialmente dall'Hemsalech.

23. Egli [1]) descrive il fenomeno nel modo seguente « la couche d' air entre les deux électrodes est d' abord percée par la décharge initiale; ensuite l' air qui se trouve dans le voisinage immédiat du chemin parcouru par la décharge est rendu incandescent; c' est le *trait lumineux*. Mais immédiatement après l' espace compris entre les deux électrodes se remplit de la vapeur métallique entraînée par la décharge initiale: c' est

1) Recherches expor. sur les Spectres ecc. p. 6.

l'auréole. Les oscillations qui suivent la décharge initiale traversent cette vapeur et la réchauffent; ces oscillations jouent probablement un rôle important dans la production du spectre carattéristique du métal ».

24. Se egli avesse avuto a disposizione delle fotografie fatte con uno specchio girante con grandissima velocità, credo che avrebbe concepita la cosa un po' diversamente. L'impossibilità di analizzare periodi dell'ordine del milionesimo di secondo, lo ha portato a interpretare l'effetto nell'aria come un riscaldamento, e a pensare all'effetto delle scariche parziali successive sul vapore metallico già esistente.

Credo che le fotografie mostrate mi permetteranno di rettificare questi concetti.

In primo luogo non vedo la ragione di ammettere che la prima scarica fori l'aria, rendendo incandescente quella che circonda il cammino che così si apre. Ma aggiungiamo che ciò sarebbe fatto oltre che dalle scariche iniziali, anche dalle successive, con intensità via via minori. Ora è difficile concepire un riscaldamento, e tanto meno un raffreddamento così repentino come dovrebbe essere questo. Inoltre le scariche parziali non si smorzano con rapidità sufficiente da rendere ragione, secondo il concetto del riscaldamento, della rapida diminuzione di intensità di queste righe, che non corrisponde al lento digradare di splendore del vapore metallico. Il gas non può nella seconda e terza scarica parziale essere notevolmente più freddo che nella prima; è probabile anzi che sia più caldo e forse per questo cesserà presto di illuminarsi [1]).

Le strisce delle scariche parziali nell'aria sono dunque dovute molto probabilmente a luminescenza elettrica.

Quanto ai vapori metallici, abbiamo esaminato il loro comportamento, il quale esclude la possibilità che vengano riscaldati via via dalle scariche parziali, o anche (se non si vuole pregiudicare la questione della temperatura) resi da esse più luminosi, e abbiamo visto che ricevono, all'atto della loro produzione, la energia che poi perdono con relativa lentezza.

1) Questa idea mi è suggerita dalle esperienze di Hittorf e di Stark riferite in altra parte del presente lavoro.

E per essi mi pare ammissibilissimo che questa energia venga prima trasformata in energia termica, e poi secondariamente in luce; o in altre parole che la scarica non faccia che riscaldarli, e la loro emissione sia di temperatura.

E invero se si trattasse di elettroluminescenza, anche in questo caso si capirebbe male, perchè la emissione non segua fedelmente il meccanismo della scarica. A meno di non volere ammettere che l'elettroluminescenza nei vapori metallici abbia un contegno diversissimo che nell'aria; cioè che essa, una volta impartita dalla scarica al vapore metallico, che questa distacca dall'elettrodo, rimanga in esso per un certo tempo (come avviene per la fluorescenza) e si estingua a poco a poco, senza venire ravvivata dalle scariche parziali successive.

25. Ora avviene che le condizioni del circuito di scarica influiscono sullo spettro, e specialmente l'autoinduzione modifica notevolmente lo spettro dei vapori metallici.

Questa influenza è stata studiata largamente, e messa in chiaro con belle e numerose esperienze dall'Hemsalech, il quale conclude che nelle sue grandi linee il fenomeno si compie nel modo seguente.

Dapprima, al crescere dell'autoinduzione, partendo da un valore molto piccolo, diminuiscono di intensità tutte le righe, ma in modo diverso.

Quelle dell'aria scompaiono gradatamente, mentre l'autoinduzione cresce fino a un certo valore.

Quelle dette di alta temperatura (ossia le *righe corte* del Lockyer) si indeboliscono rapidamente e scompaiono del tutto aumentando ancora la autoinduzione. Altre diminuiscono poco dapprima, e poi restano pressochè invariate divenendo corte. Altre infine, dopo un primo indebolimento assai lieve si rinforzano di nuovo e molto. Queste sono le righe così dette *lunghe* o di bassa temperatura.

A seconda dei metalli prevale o l'uno o l'altro effetto.

Ora questi fatti sono dall'Hemsalech discussi e spiegati secondo il suo concetto sulla costituzione della scintilla, cioè distinguendo in essa tre elementi: la scarica nell'aria, la scarica traverso ai vapori metallici e l'aureola.

Io ho mostrato, valendomi delle fotografie fatte con grande velocità di specchio, che questo concetto va alquanto modificato, e sono quindi condotto a preferire per i cambiamenti degli spettri una spiegazione ben diversa, che invece non differisce sostanzialmente da una che l' Hemsalech pure accenna nella sua monografia per poi rigettarla, io credo senza buona ragione.

26. Un aumento dell'autoinduzione procurato aumentando il numero delle spire percorse dalla corrente di scarica, ha per effetto (come mostrano forse meglio delle altre le esperienze dei signori Battelli e Magri) di aumentare la durata della scarica e di accrescere nella scintilla l' importanza dei vapori metallici (il che intanto spiega perfettamente la scomparsa delle righe dell' aria). Ciò tenderebbe ad aumentare l' intensità delle righe metalliche,

Ma da un altro lato diminuisce la parte di energia del condensatore, che si dissipa nella scintilla, e aumenta quella che si dissipa nella spirale; come appare manifestamente dalle esperienze calorimetriche della stessa memoria del Battelli e Magri. E ciò tende a diminuire l' intensità delle righe metalliche.

Quale dei due effetti prevarrà?

È naturale aspettarsi che sulle *righe corte* o di alta temperatura prevalga il secondo effetto, e sulle *righe lunghe* o di bassa temperatura prevalga il primo, come avviene effettivamente.

Ma devo notare che ciò veramente si poteva dire senza parlare di temperatura, ma solo di eccitazione più o meno energica.

La temperatura del resto a me pare in questo caso forse l' ipotesi più ragionevole, per le considerazioni esposte sopra; e non vedo la necessità di invocare la luminescenza elettrica, per rendere ragione, almeno nelle loro grandi linee, dei fenomeni luminosi dei vapori metallici, mentre di essa male si potrebbe fare a meno per ispiegare quelli del gas attraversato dalla scintilla.

27. *Scariche continue e intermittenti. — Scintille con soluzioni.* — Non vedo ragione perchè nelle scariche continue

o intermittenti la causa dell'emissione sia sostanzialmente diversa, ma esse sono meno usate per produrre gli spettri dei metalli, perchè presentano lo svantaggio che l'energia si dissipa quasi tutta nel circuito metallico e non nella scintilla, e quindi questa è molto meno luminosa.

Non voglio nemmeno trattenermi sulle scintille che scoccano attraverso soluzioni saline, perchè, oltre ad avere esse minore importanza, mancherebbe il fondamento sperimentale per le nostre discussioni.

28. *Riassunto.*

a) L'*arco* ha una temperatura elevatissima, ma non si può decidere se essa sia la vera causa dell'emissione dei vapori metallici che contiene.

b) *I gas nei tubi di Plücker*, resi luminosi dalla corrente continua, sono poco caldi, ed emettono per *luminescenza spettri a bande*, o righe deboli e numerosissime, e cessano di emettere, se la temperatura si eleva molto. Gli *spettri di righe* veri e proprii pei gas rarefatti si ottengono principalmente con scariche oscillatorie, e il gas che li produce, può essere a temperatura elevata; ma l'analogia col caso della corrente continua e delle scintille e altri indizi fanno anche per questa emissione di righe, pensare all'origine di *luminescenza.*

c) Nelle *scintille il gas ambiente* e i *vapori metallici* che si svolgono dagli elettrodi, hanno comportamenti diversi tra loro; la luminosità del primo pare una vera e propria *luminescenza elettrica* prodotta immediatamente e direttamente dalla scarica, la luminosità dei secondi si può attribuire a una specie di *fosforescenza* o anche al *solo effetto della temperatura.*

L'emissione elettrica secondo la teoria degli ioni.

1. J. Stark si è molto occupato di spiegare colla teoria degli ioni la luminosità elettrica dei gas; e bisogna che di queste vedute teoriche io faccia qui un breve cenno.

Mi pare che il concetto principale dei suoi lunghi lavori [1]) si possa riassumere nel modo seguente:

1) Ann. d. Phys. (4), vol. 14, p. 506. 1904. Nachrichten v. d. Königl. Gesell. d. Wissenschaften zu Göttingen, 1904, H. 3, p. 205.

Il moto progressivo degli ioni non può dare spettri di bande o di righe (solo il brusco partire o arrestarsi degli ioni può dare uno spettro continuo).

Le righe o le bande sono prodotte da vibrazioni interne delle particelle, e queste alla lor volta sono effetto degli urti degli elettroni negativi che si muovono nell' interno del gas. L' urto di questi elettroni è da considerare adunque come l' *eccitatore* della radiazione (*Strahlungserreger*).

Ma quali sono i *vibratori*, le particelle che col loro moto relativo al proprio centro di massa producono le onde luminose (*Träger*)?

Lo Stark emette l' ipotesi che i vibratori degli spettri a bande siano i sistemi di un atomo residuo positivo con un elettrone negativo nell' atto di riformare l' atomo neutro.

Per lo spettro a righe sarebbe l' atomo residuo libero che vibrerebbe dopo che la collisione con un elettrone in moto lo ha privato di uno dei suoi elettroni e ridotto ione positivo.

Ma senza discutere se tale ipotesi sia sufficientemente appoggiata dalle esperienze, dirò che questo mi pare assai bene messo in chiaro, che cioè la emissione (ove non sia un semplice effetto di riscaldamento) è una conseguenza più o meno diretta degli urti degli elettroni negativi colle particelle più complesse.

Nell' emissione di temperatura invece sono le collisioni delle molecole tra loro che producono le vibrazioni interne, le quali quindi stanno in diretta connessione colla forza viva media molecolare che determina la vivacità di queste collisioni. La validità rigorosa della legge di Kirchhoff è conseguentemente vincolata alla distribuzione maxwelliana delle forze vive.

Nel caso di un gas ionizzato percorso dalla corrente, la distribuzione delle velocità non è maxwelliana; in esso gli elettroni negativi hanno velocità e anche forze vive molto superiori alle altre particelle (lasciando anche che vi è una direzione privilegiata nel loro movimento) e quindi nei sistemi che ricevono il loro urto si determinano vibrazioni molto più energiche di quello che porterebbe la temperatura *media* del gas.

Ciò esprime lo Stark dicendo che vi è una *temperatura elettrica* assai elevata e una *temperatura termica* assai più bassa.

Con questi concetti egli interpreta i fenomeni spettroscopici; e francamente io mi permetto di dissentire da lui in alcune quistioni particolari, ma nelle vedute generali relative all' estensione del concetto di temperatura lo seguo volentieri, e vorrei anzi andare più in là.

2. Abbiamo visto come l' emissione delle fiamme si possa in un certo modo riportare a emissione di temperatura, però essendo la temperatura non quella media della fiamma, ma quella parziale del prodotto di combustione. Qualcosa di simile si può pensare per i gas o vapori percorsi dalla corrente elettrica.

E veramente la luminosità elettrica, come quella delle fiamme, ha con quella di temperatura questo a comune, l'esser cioè un effetto di *collisioni* tra le particelle del gas. Orbene, l' esperienza mostra che in quei casi in cui bisogna ammettere sia maggiore la velocità degli elettroni urtanti e quindi la vivacità degli urti, l'emissione presenta i caratteri come di più alta temperatura.

Ora io mi domando: sarebbe possibile con un complesso di urti molecolari, dovuti a una temperatura Θ, con distribuzione di forze vive maxwelliana, e convenientemente elevata, produrre nelle particelle vibranti (ammesso che esse possano esistere enche in condizioni diverse da quelle in cui si trovano nel gas percorso dalla scarica) lo stesso effetto ossia lo stesso movimento vibratorio che producono gli urti degli elettroni?

Per ciò che riguarda l' ammontare di energia media delle collisioni, certo si otterrà lo stesso effetto, pure di prendere convenientemente la temperatura Θ.

Ma la distribuzione dell' intensità degli urti sopra e sotto la media e la specie del movimento potrà esser la stessa? O piuttosto potrà aversi l' equivalenza nell' effetto complessivo di un gran numero di collisioni?

Se si ammette di rispondere affermativamente a queste domande, si giunge a ciò, che l' emissione elettrica equi-

varrebbe perfettamente a una emissione di temperatura, e quindi varrebbe per essa pure la legge di Kirchhoff

$$E = A\, s\, (\Theta)$$

dove però A dipenderebbe dalla costituzione dei vibratori e quindi presumibilmente dalla scarica o corrente, e Θ sarebbe puramente virtuale e assai superiore alla vera temperatura del corpo.

Ora le esperienze mostrano che almeno qualitativamente le conseguenze della legge di Kirchhoff sono soddisfatte, come vedremo nel seguente capitolo; e ciò indurrebbe a credere che l'ipotesi fosse vicina al vero. Potrebbe essere un'approssimazione; ma di qual grado?

Io ho voluto solo mostrare che le ultime conseguenze della teoria ionica della luminosità elettrica nei gas non ci portano lontani dal concetto di emissione di temperatura.

3. Io credo che l'urto degli elettroni possa applicarsi alla luminescenza elettrica dei *gas* nei tubi di Plücker e inoltre nella scintilla (scintilla pilota e scariche parziali) e anche probabilmente ai vapori di metalli volatili entro tubi a vuoto, (lampade a mercurio o a cadmio). L'applicazione all'arco è molto discutibile. Quella alla luminosità dei vapori metallici nella scintilla mi pare che difficilmente si possa sostenere, per il fatto da me posto in rilievo sopra, che essi sono resi luminosi dal momento in cui si staccano dagli elettrodi, e che la loro luminosità non viene ravvivata dalle successive scariche parziali. Vero è però che spesso si osserva un distacco piccolissimo della luminosità metallica dall'estremo dell'elettrodo negativo; e ciò farebbe pensare a un'intervallo necessario perchè l'elettrone potesse acquistare la forza viva necessaria per compiere sul vapore metallico l'ionizzazione per urto, e rendere emittente l'atomo-ione metallico.

Ma il distacco si spiega anche bene col solo concetto di temperatura, cioè come effetto di raffreddamento prodotto dall'elettrodo metallico sullo strato di vapore che gli è più vicino.

Ad ogni modo, pure accettando anche in questo caso l'ipotesi degli urti degli elettroni, la inserzione di autoinduzione av-

vicina la scintilla all'arco, cioè non aumenterebbe (come dice lo Stark) ma diminuirebbe la temperatura elettrica; e questo sarebbe più in armonia colle misure di Battelli e Magri della distribuzione dell'energia nelle varie parti del circuito di scarica. Un effetto simile sarebbe prodotto nelle esperienze di Cresc e Baker [1]) dall' arroventamento degli elettrodi.

Il lettore può farsi un' idea da questo cenno sulla eccitazione elettrica degli spettri, di quanti problemi interessanti si presentino e possano esser trattati specialmente per mezzo dello specchio rotante e lo spettroscopio.

V. — Inversione delle righe spettrali.

1. È noto che la luce bianca di una sorgente assai intensa che abbia traversato un vapore capace di dare delle righe di emissione, può mostrare allo spettroscopio al posto di esse delle righe oscure che si dicono invertite [2]).

E veramente le righe chiare ci sono lo stesso, ma appariscono scure rispetto al fondo continuo più splendente di esse.

2. Se le radiazioni sono di temperatura, è facile dedurre dal teorema di Kirchhoff il fenomeno e le sue leggi.

Supponiamo che il corpo C_1 emetta dei raggi, e li invii attraverso al corpo C_2 il quale emette alla sua volta.

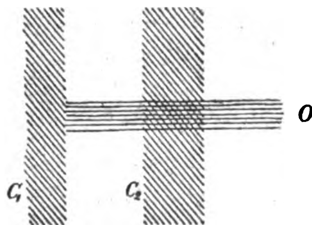


Fig. 8.

1) Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, vol. 38, p. 397, 1902. Tra due carboni coi quali era stato prima formato l' arco, e decorso un intervallo di tempo variabile dopo spento questo, essi facevano scoccare una breve successione di scintille, fotografandone lo spettro. La natura di questo dipende da quell' intervallo di tempo, cioè dalla temperatura dei carboni, in linea generale presentando carattere di più alta temperatura quando questi sono più freddi.

2) Anche per gli spettri di bande si ha l' inversione: per esempio, gli spettri dell' iodio e del bromo descritti nella nota citata.

Prendiamo a considerare per semplicità soltanto i raggi perpendicolari alle superficie dei corpi che giungono in O, e limitiamoci alle radiazioni di una sola lunghezza d'onda λ. Indichiamo con A_1 il potere assorbente e con E_1 quello emissivo di C_1, con A_2 e con E_2 il potere assorbente e emissivo di C_2, e con ε_1 ed ε_2 i poteri emissivi del *corpo nero* respettivamente alle temperature Θ_1 di C_1 e Θ_2 di C_2.

C_1 emetterà nella unità di tempo

$$E_1 = A_1 \varepsilon_1$$

e C_2 emetterà

$$E_2 = A_2 \varepsilon_2 ,$$

e delle radiazioni di C_1 trasmetterà (trascurando le riflessioni alla superficie)

$$E_1 (1 - A_2) = A_1 (1 - A_2) \varepsilon_1 ;$$

sicchè in O giungerà l'energia

$$A_1 \varepsilon_1 + A_2 (\varepsilon_2 - A_1 \varepsilon_1) ,$$

mentre, se C_2 non ci fosse, vi giungerebbe l'energia

$$A_1 \varepsilon_1 .$$

Cioè la intensità della radiazione sarà per effetto della presenza di C_2 aumentata di

$$A_2 (\varepsilon_2 - A_1 \varepsilon_1) ,$$

ossia aumentata veramente se è

(1) $$\varepsilon_2 > A_1 \varepsilon_1$$

e diminuita se è

(2) $$\varepsilon_2 < A_1 \varepsilon_1 ;$$

resterà la stessa se è

(3) $$\varepsilon_2 = A_1 \varepsilon_1$$

Se il corpo C_2 ha un potere assorbente notevole per la lunghezza d'onda λ, e piccolo nell'intorno di essa [1]), si avrà in questo intorno spettrale lo spettro di emissione di C_1, e nel posto corrispondente a λ la riga spiccherà in chiaro se vale

1) Per semplicità trascuro la larghezza delle righe.

la (1), in iscuro se vale la (2), e non si distinguerà dal fondo se vale la (3) la quale rappresenta, dirò così, il *caso critico*.

Se C_1 è assolutamente nero, le tre relazioni divengono semplicemente:

(1′) $$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$$

(2′) $$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$$

(3′) $$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 .$$

Tutto ciò significa che una riga si inverte o no indipendentemente dal potere assorbente del corpo C_2 che la produce, ossia indifferentemente se essa sia più forte o più debole.

Che se poi il corpo C_1 è *assolutamente nero*, la riga si inverte o no a seconda che la temperatura maggiore è quella di C_1 o di C_2 poichè come è noto il potere emissivo del *corpo nero* cresce colla temperatura.

E siccome quest'aumento è maggiore per le lunghezze d'onda minori, così le righe più rifrangibili si dovrebbero vedere più distinte, sia per emissione, sia invertite.

3. Queste leggi così nette e semplici farebbero sperare una verificazione sperimentale, la quale, si intende, piuttosto che come appoggio alla legge di Kirchhoff, avrebbe importanza per decidere finalmente in molti casi la quistione se le radiazioni sono di temperatura.

La esperienza più diretta sarebbe quella di inviare attraverso al vapore in istudio la radiazione del *corpo nero* e determinare le temperature corrispondenti a diverse di quelle condizioni che ho or ora denominato critiche. Ma questa esperienza presenterebbe all'atto pratico delle difficoltà forse insuperabili, specialmente per ottenere una temperatura uniforme nel vapore e per giudicare sulla presenza o no della inversione in un modo uguale per le diverse righe.

Anzi ordinariamente si osserva la inversione delle righe in condizioni diversissime da quelle che si ammettono per farne la teoria, e quindi se i fatti non corrispondono alle conseguenze di questa, ciò non è una buona ragione per ammettere l'origine di luminescenza delle righe; come d'altra parte la presenza della inversione come fatto generale, non

prova che le righe siano dovute a una radiazione di temperatura, perchè si può spiegare colla risonanza come vedremo appresso.

Il ragionamento che io ho posto in principio di questo capitolo è quello classico su cui da Kirchhoff in poi si è per molto tempo fondata ogni discussione di confronto tra righe chiare e righe scure, sebbene si desse anche la spiegazione fondata sulla risonanza; ma questa veniva tenuta in minor conto. E se il Lockyer nel suo libro, rivolto a un pubblico non strettamente scientifico, la preferisce, credo che lo faccia solo perchè la considera come più intuitiva.

4. Ma prima di esporre i concetti moderni sulla inversione spettrale, mi par bene riferire dei fatti fermandomi specialmente sulle belle esperienze di Liveing e Dewar, che si presero cura di verificare questo principio generale per i vari modi più usati di produzione degli spettri.

Prima di tutto voglio ricordare la esperienza semplicissima, ma molto elegante ideata da Kirchhoff per la dimostrazione del fenomeno [1]). I raggi solari cadono sulla fenditura dello spettroscopio attraversando una fiamma rossa per litio. La riga rossa si vede invertita, ma indebolendo i raggi solari prima della fiamma con l'interposizione di un vetro smerigliato posto a distanza sempre più grande dalla fenditura, si arriva a un punto in cui la riga scura scompare per dar luogo a una chiara, allontanando ancora il vetro.

Ma spesso la sorgente delle radiazioni che danno il fondo è unita a quella che dà la riga. Possono anzi essere i diversi strati di una massa di vapore, e ciò è frequente nelle fiamme e nell'arco, ove ha luogo il fenomeno seguente.

La luce emanata dalla parte interna in cui il vapore è più denso e più fortemente eccitato, giunge allo strumento traversando uno strato superficiale dello stesso vapore meno denso ed eccitato meno.

Questo strato esterno produce una riga scura sottile, entro la chiara espansa di emissione prodotta dallo strato interno. Il più delle volte la riga scura occupa precisamente il

1) Kayser. Handbuch. B. 2.

mezzo; ma può essere anche più raramente sopra una parte, se la riga non si espande ugualmente dai due lati. Questa è la così detta autoinversione, e si osserva spesso nelle fiamme e nell' arco e anche nelle scintille.

5. Le prime esperienze [1]) di Liveing e Dewar erano più che altro semplici esperienze di assorbimento, e venivano effettuate per mezzo di una canna di ferro chiusa a un estremo e arroventata entro un fornello, nella quale si faceva circolare una leggera corrente di idrogeno, e si gettavano i metalli da studiare, metalli facilmente volatili, cioè *litio, sodio. tallio, potassio, magnesio, indio,* ecc.

In tal modo si formava una massa di vapori assai densi che assorbivano la luce emessa dalle pareti e dal fondo del tubo, dando le righe scure corrispondenti alle loro lunghezze d' onda caratteristiche.

Queste righe non si vedono tutte con eguale facilità; si notano influenze reciproche di un metallo sull' altro, fino al punto che alcune righe sono presenti solo col miscuglio di due metalli (per esempio *potassio* e *magnesio*) e non sono date da ciascuno di essi.

Ma per ottenere in maggior numero le righe invertite, cioè per ottenerle anche per metalli meno volatili, Liveing e Dewar [2]) ricorsero a fiamme o archi elettrici nell' interno di crogiuoli speciali di sostanze refrattarie come calce o magnesia o anche di carbone, e in tal caso il crogiuolo stesso serviva da elettrodo positivo.

In queste esperienze fu anche usata, per liberare i metalli dai loro composti, polvere di alluminio, che a temperature elevatissime è uno dei più energici riducenti che si conoscano.

6. Liveing e Dewar si occuparono molto e ripetutamente di siffatte esperienze sulla inversione delle righe con questi e simili apparecchi. I risultati che più ci interessano sono riferiti nella memoria « *Sulle circostanze che producono l'inversione delle righe spettrali dei metalli* » [3]). In essa gli autori registrano diverse specie di inversioni:

1) Proc. Roy. Soc., vol. 27, p. 132, 350, 494.
2) Proc. Roy. Soc., vol. 28, p. 352, 367, 471, 1879.
3) Cambr. Proc. 4, p. 256, 1882.

1° L'autoinversione delle righe espanse.

2° L'inversione completa il cui fondo è dato sia dal foltissimo spettro discontinuo dell'arco, sia dallo spettro continuo dei carboni.

3° L'inversione delle righe di un metallo sul fondo delle righe espanse di un altro.

L'inversione delle righe può esser prodotta su scala più larga, inviando nell'arco una corrente di gas riducente (idrogeno, gas illuminante, ammoniaca) attraverso a uno dei carboni perforato all'uopo.

In questo modo l'assorbimento degli strati esterni viene aumentato, e ciò probabilmente perchè il gas riducente protegge il vapore metallico dall'ossidazione e quindi agevola la formazione di uno strato più denso di esso intorno all'arco. L'effetto è un indebolimento delle righe o la inversione, o anche, se l'emissione e l'assorbimento si contrabbilanciano, la loro scomparsa. Il cloro produce un effetto opposto.

7. Un altro modo elegante di studiare le righe invertite e il loro rapporto con quelle di emissione è il seguente.

Un carbone perforato e uno pieno sono introdotti in opportune perforazioni praticate in un blocco di calce in modo che il carbone pieno col suo estremo incontri l'altro a metà. Tra i due carboni si forma l'arco e così il carbone perforato che funziona da positivo viene portato a una temperatura molto elevata.

L'immagine del suo interno è mediante una lente proiettata sopra la fenditura di un apparato spettrale, e si ottiene così sopra e sotto uno spettro continuo dato dalle pareti del foro, solcato da righe oscure provenienti dai vapori metallici, che sono nell'interno, o prodotti da impurità del carbone o introdottivi appositamente. Nel mezzo invece si mostrano le righe di emissione corrispondenti ed altre che non compariscono tra le invertite.

Di questi e degli altri esempi di inversione Liveing e Dewar pubblicano belle fotografie [1]).

1) Qui voglio notare così di passaggio che quando si lavora colla fotografia, la inversione dell'effetto fotografico per posa eccessiva può simulare la inversione spettrale come avverte Hartley (Proc. Roy. Soc. vol. 34, p. 84, 1882) che consiglia, per mettersi al

Infilando nel carbone perforato una bacchettina pure di carbone che vi vada precisa, si può produrre un fondo luminoso di splendore più o meno intenso secondo il punto a cui si fa giungere l' estremo della bacchettina, e così le righe si invertono anche nel mezzo.

Ma per quanto si avanzi la bacchettina, non si riesce a invertirle tutte, e quelle che si invertono, non si invertono insieme.

8. E qui mi sia permesso di ritornare ancora un poco sulla questione dell' emissione di temperatura, cercando di interpretare questa esperienza.

La parte più profonda del tubo di carbone quando l' estremo della bacchetta scorrevole si trova al punto conveniente, costituisce un ambiente quasi del tutto chiuso a temperatura approssimativamente uniforme, e quindi la sua emissione deve essere quasi uguale a quella del *corpo nero*. Se si potesse limitare lo strato dei vapori metallici alla parte che ha questa temperatura costante, si avrebbe un criterio per giudicare se l' emissione è di temperatura; perchè manifestamente allora le righe non si dovrebbero distinguere in chiaro nè in iscuro dal fondo.

Ma i vapori si estendono necessariamente in parti più fredde del tubo, più o meno a seconda della loro natura, e ciò, anche nel concetto dell' emissione di temperatura, rende ragione delle inversioni e spiega come possano essere più o meno visibili per diversi metalli.

Ma come si spiega che alcune righe anche tra quelle di uno stesso metallo si possono invertire più facilmente di altre, e che anzi alcune non si invertono affatto?

Anche di ciò possiamo farci una ragione nel concetto dell' emissione di temperatura, tenendo conto della moltepli-

coperto di tale errore, di fare fotografie con varie pose, e vedere se l' inversione si presenta in quelle meno posate. Ma spesso basta anche osservare le linee all' orlo dello spettro: se sono aperte a forma di imbuto l' inversione è reale, se sono invece chiuse è effetto fotografico. Di tale criterio si valsero Liveing e Dewar.

Se poi si lavora con scariche, la cosa è più complicata, e si può avere il così detto effetto Clayden che pure simula l' inversione: vedi R. Wood. Phil. Mag. serie 6, vol. 4, p. 606, 1902, vol. 6, p. 577, 1903.

cità degli spettri, come cercherò di mostrare con l'esempio più curioso, che è quello delle linee del calcio.

La riga $\lambda = 4226$ [1]) appare facilmente invertita nel tubo di carbone, mentre le due corrispondenti alle H e K del sole si vedono talvolta soltanto per emissione togliendo la bacchettina interna.

Ora, sempre rimanendo nel concetto della emissione di temperatura, si sa che le righe H e K sono di *alta temperatura* (esse compaiono solo nell'arco e nelle scintille) e la 4226 è di bassa temperatura (compare anche nelle fiamme e si attenua passando dall'arco alle scintille). Quindi il vapore più esterno, meno caldo, è capace di emettere e anche di assorbire la 4226, ma non è capace di emettere e nemmeno di assorbire le H e K. Ciò è in armonia, non solo coi fatti riferiti, ma anche colle idee teoriche espresse dal Lockyer nel suo libro [2]), che cioè l'alta temperatura non solo produca l'emissione delle righe H K, ma anche sia necessaria perchè si possa avere l'assorbimento corrispondente. Riferendosi alla legge di Kirchhoff, l'alta temperatura renderebbe notevole il valore di A corrispondente alle righe H K che per temperatura inferiore sarebbe sensibilmente zero, oltre a rendere maggiore il valore di ϵ. L'ipotesi della dissociazione, se anche non è, nella forma in cui la esprime il Lockyer, conforme alla realtà, ha il vantaggio di dare un modello intuitivo del fenomeno; in sostanza essa viene a dire questo, che i vari spettri di un corpo non sono prodotti dagli stessi organi vibranti in vari modi, ma da organi vibranti diversi. Ma su ciò dovremo tornare a proposito di un'altra esperienza di Liveing e Dewar, discutendola secondo il concetto di luminescenza e non secondo quello di temperatura.

9. L'autoinversione delle righe è il fenomeno che si presta meglio per mostrare le relazioni tra le righe chiare e le scure.

1) 422,6898 nell'arco, secondo il campione di Rowland.
2) Studi di Analisi Spettrale, 175 e seg.

Sperimentando coll' arco si riscontra che solo le *righe lunghe* [1]) mostrano facilmente l' autoinversione; e ciò prova che lo strato esterno assorbe, delle lunghezze d' onda caratteristiche del vapore in esame, soltanto quelle che esso è capace di emettere al grado di eccitazione relativamente debole a cui si trova.

10. Ma uno speciale interesse ha l' esperienza colla quale Liveing e Dewar ottennero l' autoinversione delle righe dell' idrogeno in un tubo di Plücker. Questo era presso a poco della solita forma e veniva osservato per il lungo in modo che la luce assai intensa prodotta dal capillare doveva traversare il tratto pure luminoso, ma più debolmente, del tubo largo. La rarefazione non doveva essere maggiore di quanto è necessario per dare facile passaggio alle scariche del rocchetto usando un condensatore. Orbene, proiettando sulla fenditura dello spettroscopio per mezzo di una lente l' immagine della sezione del tubo, si vedevano con forte dispersione nel mezzo le righe enormemente espanse prodotte dal capillare che prendevano l' aspetto come di tratti di spettro continuo, e sopra e sotto le righe più sottili prodotte dal tubo largo; e in corrispondenza di queste si vedevano nello spettro di mezzo le righe invertite; ciò veramente solo per la riga rossa e per la azzurra (respettivamente, la C e la F di Fraunhofer).

Questa esperienza è molto istruttiva per più ragioni. In primo luogo perchè è, credo, il solo esempio descritto di inversione per i gas rarefatti. In secondo luogo perchè serve mirabilmente a chiarire ciò che abbiamo già notato, e che è

1) Credo opportuno ricordare il significato di questa denominazione che mi occorre di usare spesso.

Proiettando sovra la fenditura dello spettroscopio l' immagine di una sorgente luminosa, si analizza l' emissione delle varie parti di essa, per esempio proiettandovi l'immagine dell' arco in modo che l' asse doi carboni sia perpendicolare alla fenditura, si vede che alcune righe sono date da tutta l' estensione dell' arco e altre solo dalla parte centrale; le prime risultano più lunghe delle seconde, e corrispondono respettivamente ad eccitazioni meno vive e più vive. Il Lockyer, che specialmente si è valso di questo metodo, ha introdotto appunto la semplice distinzione di righe *lunghe* e *corte*.

Il metodo si applica con vantaggio anche alle scintille, ma qui è più interessante l' osservazione fatta disponendo lo spinterometro parallelo alla fenditura in modo che l' immagine della scintilla vi sia proiettata sopra longitudinalmente.

In tal modo si riconosce quali righe si avanzino più lontano, quali meno dagli elettrodi.

di importanza capitale per la spettroscopia, che cioè l'eccitazione (in questo caso elettrica) non solo produce le righe di emissione, ma anche quelle di assorbimento. Mi spiego: una colonna di idrogeno, per quanto lunga, non percorsa dalla scarica non avrebbe esercitato nessun' assorbimento sulle righe emesse dall' idrogeno del tubo capillare. L' inversione si produce invece per effetto di uno strato di piccolo spessore, purchè esso sia eccitato in modo da produrre le stesse righe, ma più debolmente. Con un concetto perfettamente simile abbiamo sopra cercato di spiegare il fenomeno presentato dalle righe del calcio con considerazioni di temperatura.

Ma già per l' arco abbiamo parlato di eccitazione in generale. E veramente dopo questo ultimo esempio, in cui molto probabilmente si tratta di luminescenza, si comprende addirittura la necessità di adoprare il termine generico *eccitazione* senza specificarne la natura.

E possiamo concludere che essa non solo fornisce l' energia alle vibrazioni, ma costruisce o piuttosto svolge o libera un organo capace di emettere e assorbire le stesse lunghezze d' onda. Vedremo come ciò venga chiarito colla ipotesi della risonanza; ora si noti che la densità nei diversi strati che producono la riga espansa e la inversione, non deve considerarsi come vera densità del vapore o gas, poichè in questo caso la densità dell' idrogeno è, se mai, minore nel capillare che è più caldo; sibbene va interpretata come densità di questi ipotetici vibratori che sono dovuti all' agente stesso che provoca l' emissione. È veramente essa che determina la larghezza delle righe spettrali e voglio, seguendo lo Stark, chiamarla *densità ottica*.

11. Ed ora conviene avvertire che la invertibilità delle righe, come risulta dalla osservazione spettroscopica, ha poco di assoluto, perchè il numero delle righe che mostrano l'inversione, necessariamente dipende anche dalla potenza risolutiva dello spettroscopio.

Ciò pure si osserva bene per le autoinversioni. Il Kayser cita l' esempio dello spettro di arco del ferro che, fotografato con due prismi, mostra pochissime righe invertite, mentre il loro numero cresce molto adoprando un reticolo concavo e

cresce coll'ordine degli spettri usati; e siccome molte righe presentano una sottilissima linea di inversione nel mezzo, è naturale pensare che con strumenti di forza risolutiva considerevolmente superiore a quella degli strumenti di cui ora si può disporre, il numero delle inversioni crescerebbe ancora molto.

12. Da tutti questi fatti e da altri ancora che non sto a riferire, apparisce che le righe di emissione e le invertite sono due aspetti diversi dello stesso fenomeno, e saremmo condotti a pensare che tutte le linee di emissione siano suscettibili di invertirsi. Ma in vero non vi sono esperienze tali da rendere pienamente giustificata una conclusione così generale, e anzi alcuna se ne può citare contro di essa.

È qui il caso di ricordare, sebbene si tratti di spettri di bande che non hanno valore per la spettroscopia celeste, che Hittorf non riuscì a invertire lo spettro emesso da gas rarefatti percorsi dalla corrente continua, e ne dedusse anzi un argomento per confermare la natura di *fosforescenza* (come diceva lui) di questi spettri.

E questo era naturale in un tempo nel quale si considerava ancora ogni inversione come conseguenza della legge di Kirchhoff, e quindi proprietà caratteristica delle radiazioni di temperatura.

Ma ora si tende invece a considerare l'inversione come una proprietà generale relativa a ogni specie di emissione, e sappiamo dalle ricerche di J. Kurke [1]) che anche il vetro di uranio assorbe i raggi, che è capace di emettere per fluorescenza, più intensamente appunto quando li emette [2]). E si trova difficoltà a spiegare un caso di eccezione [3]) come quello della esperienza di Hittorf, la quale però forse non ha un valore decisivo, perchè non toglie il dubbio che in condizioni più favorevoli l'inversione si potesse osservare.

1) Phil. Trans. 191, p. 88, 1898.

2) È vero che l'esperienza del Kurke fu contraddetta dal Camichel (C. R. vol. 140, N. 3, 1905), ma il Kurke in un recente numero della Nature ribatte la confutazione, e ricorda altre esperienze simili. Sicchè è da ritenere che il risultato suo sia giusto.

3) Un'altra eccezione è presentata dalla riga D_3 dovuta all'elio, che apparisce come riga di emissione nella cromosfera e non come riga di Fraunhofer nell'ordinario spettro solare.

Invece non è stato rilevato nessun caso di eccezione, per quanto ho potuto riscontrare, alla proposizione inversa; che cioè *tutte le righe invertite corrispondono a righe di emissione*.

13. Questa corrispondenza basta allo spettroscopista per accertare la presenza degli elementi nello *strato invertente* di un astro, poichè egli può a buon diritto ammettere che le righe vedute in iscuro, a causa dell' inversione, potrebbero ottenersi chiare per emissione dalla stessa sostanza; e quindi le conclusioni che egli ricava dalla coincidenza con righe di emissione ottenute in laboratorio sono pienamente giustificate quando dànno resultato positivo. Dei resultati negativi bisogna sempre diffidare.

14. Ma oltre alle coincidenze delle lunghezze d'onda, quali altre relazioni passeranno tra lo spettro invertito e lo spettro di emissione di un corpo?

Veramente abbiamo visto che le righe non si invertono tutte colla stessa facilità. Liveing e Dewar hanno anzi trovato che quelle più facilmente invertibili non sono sempre le più forti, ma sono forti e persistenti, ed assegnavano ad esse una speciale importanza. Esse sono più frequenti nella parte più rifrangibile dello spettro; e ciò suggerì ai due spettroscopisti inglesi l' idea che le righe visibili siano armoniche inferiori (ossia qualcosa di analogo ai suoni di Tartini) di righe principali poste nell' ultravioletto. Ma anche prescindendo da ciò, della maggior frequenza delle inversioni nella parte più rifrangibile si può dare una interpretazione semplicissima.

Abbiamo già notato che nel concetto di temperatura le righe invertite devono avere maggiore risalto per lunghezze d' onda minori; esse potranno quindi più facilmente raggiungere quel certo risalto che è necessario per rendere l' inversione visibile. A tale interpretazione pare che propenda il Kayser.

Ma talvolta righe con lunghezza d' onda minore si invertono invece più difficilmente di righe con lunghezza d'onda maggiore (per esempio le tre righe del calcio di cui si è discusso a lungo); sicchè anche questa spiegazione vale fino a un certo punto soltanto.

Lo stesso si dica riguardo alla limitata potenza risolutiva degli strumenti. In conclusione, le esperienze conducono ad ammettere una invertibilità propria per ciascuna riga, che non va di pari passo colla forza di essa, e può darsi anche che in qualche caso manchi addirittura.

Più recentemente è stato trovato che l' invertibilità va di pari passo per righe della stessa serie: per i metalli alcalini le righe della serie principale sono le più invertibili.

15. Ciò mette il sospetto che ogni ulteriore conclusione fondata sulla intensità relativa delle linee invertite, o anche sulla loro presenza o assenza, o, in altre parole, ogni applicazione della *molteplicità degli spettri* alla spettroscopia celeste, venga a mancare di fondamento. Ma nel fatto non è cosi; perchè se si ammette un parallelismo perfetto tra le righe invertite e le righe di emissione, si giunge appunto, tenendo conto della *molteplicità* degli spettri, a spiegare quelle apparenti discordanze di cui abbiamo parlato fin qui.

Il caso del calcio è ancora il più istruttivo, e fu quello forse che aperse al Lockyer il campo alle più ardite speculazioni di spettroscopia celeste.

La spiegazione che ne abbiamo data si può estendere nel modo seguente senza parlare più di temperatura.

Ammettiamo che le rige non sieno ottenibili tutte colla stessa eccitazione, ma si possano distinguere per questa diversi gradi, a cui esse compaiono per poi scomparire di nuovo talvolta quando sia raggiunto un grado di eccitazione più elevato. Quanto più è elevato il grado di eccitazione, e tanto più deve essere intensa la sorgente di luce bianca capace di invertire la riga, ossia capace di dare un fondo continuo che nell'intorno di essa superi la somma dell' intensità trasmessa ed emessa dal vapore appunto nella riga. Per le radiazioni di temperatura la legge di Kirchhoff ci dà il modo di precisare perfettamente quando ciò debba avvenire, ma in generale potremo dire soltanto che a gradi di eccitazione via via più elevati dovranno corrispondere per il fondo intensità via via maggiori, ossia se il fondo è dato da radiazioni di temperatura (prodotte, per esempio, da un solido incandescente) corrisponderanno per quest' ultimo temperature via via più elevate.

La temperatura del *corpo nero* che dia il fondo continuo sarebbe, quando si verifica la *condizione critica,* uguale a quella del vapore, se emettesse per temperatura, cioè in ogni caso uguale alla *temperatura della radiazione emessa dal vapore* (nel concetto del Wien).

Siccome nei nostri laboratori l'eccitazione di un gas o vapore si può spingere a un grado elevatissimo, ma non così la incandescenza di un solido, ne viene che la inversione completa su fondo continuo si otterrà facilmente soltanto per le righe corrispondenti a un grado di eccitazione basso: e ciò è in accordo colle esperienze citate.

Le autoinversioni si presentano solo quando esistano insieme due gradi diversi di eccitazione, e quindi saranno esse pure (come avviene nel fatto) più facili a ottenere nelle righe più *lunghe.*

Così, mi pare, tutto torna perfettamente, e resta confermata la completa corrispondenza tra lo spettro invertito e lo spettro di emissione. Cioè, dalla presenza di certe piuttosto che di certe altre righe invertite di un corpo semplice, potremo farci, ugualmente bene come se fossero righe chiare, il concetto del grado di eccitazione cui è sottoposto quel corpo nello strato invertente di un astro, non solo, ma anche della intensità specifica di emissione del fondo continuo della sua fotosfera; e se (come molti ritengono per il sole) questa si considera formata da particelle solide o liquide, e quindi si esclude per essa la luminescenza, possiamo anche farci un'idea della sua temperatura.

Il vero fondamento della analisi spettrale dei corpi celesti è adunque nel principio della inversione dello spettro quale risulta da queste esperienze.

VI. — Risonanza e dispersione anomala.

1. La spiegazione dell' inversione spettrale si ha nel fenomeno di risonanza.

Se si ammette che le righe sieno dovute a sistemi capaci di vibrare con determinati periodi, e propagare le loro vibrazioni nell'etere, qualunque poi sia l'ipotesi che si faccia sul

meccanismo di questi vibratori, ne viene di conseguenza che essi risponderanno a vibrazioni che si propagano nell' etere, e le oscillazioni in essi destate saranno di ampiezza notevole solo quando le oscillazioni incidenti hanno periodo vicinissimo ad uno dei periodi caratteristici.

Se il periodo è notevolmente diverso, la radiazione passa oltre senza indebolirsi, ma se il periodo è tanto prossimo che si abbia la risonanza, ecco che una parte dell' energia della radiazione si comunica ai vibratori, le cui oscillazioni aumentano sempre di ampiezza, fino a un regime che si stabilisce quando l' energia ricevuta sia pari a quella perduta.

Di questa in generale bisogna considerare due porzioni:

1) quella che il risonatore dissipa in se stesso, e che poi viene trasformata in energia termica o chimica o altro nel corpo assorbente;

2) quella che il risonatore emette, formando le cosi dette onde secondarie.

Tutte e due saranno alimentate dall' energia della radiazione primaria, e quindi questa dovrà, dopo incontrato il risonatore, risultare indebolita per doppia causa.

Anche se la prima perdita non ci fosse (come nel caso studiato dal Planck) basterebbe considerare che le onde secondarie e le primarie si trovano in opposizione di fase sul prolungamento della retta che congiunge l' origine col risonatore, per giungere alla conclusione che si indeboliscono a vicenda interferendo [1]).

2. Se si applicano queste considerazioni a un vapore che presenti una riga di lunghezza d' onda λ, su cui cade la luce bianca, si giungerà alla conclusione che i raggi di lunghezza d' onda diversa da λ passano inalterati; quelli di lunghezza d' onda λ invece saranno indeboliti, di modo che la luce trasmessa presenterà la riga invertita, e l' energia che manca ai raggi trasmessi sarà in parte comunicata al corpo (assorbita) e in parte andrà nelle onde secondarie, ossia si produrrà per la lunghezza d' onda stessa λ una specie di riflessione diffusa.

1) Righi. Ottica delle oscillazioni elettriche, p. 43. — Planck. Wied. Ann. vol. 57, p. 1, 1896.

Ma qual frazione della energia ricevuta rappresenta questa energia diffusa in onde secondarie? P. Drude [1]) ne tenta un calcolo per le righe del sodio, ma non giunge che ad assegnare due limiti, superiore e inferiore, molto lontani l' uno dall' altro. Nella ipotesi più sfavorevole, l' energia diffusa sarebbe circa un millesimo della ricevuta, ma potrebbe anche essere una frazione assai maggiore.

E qui rimando alla mia nota sulla fluorescenza del vapore di sodio, e torno ancora alla molteplicità degli spettri.

3. La presenza di una riga o serie di righe, sia per assorbimento sia per emissione, indicherebbe la presenza di un certo vibratore.

Quando di un elemento son presenti per emissione o per assorbimento alcune righe e altre no, ciò dipenderebbe da questo: che quelle condizioni di temperatura o altro permettono la esistenza di certi vibratori e non di altri, prescindendo da ciò che può esser quistione di sensibilità del metodo di osservazione e dai casi in cui, essendo la temperatura inferiore all' incandescenza, non si vede la riga per emissione, ma solo per assorbimento.

Questa è, secondo me (e, quel che più conta, Kayser esprime in altra forma un concetto simile) la parte vera della teoria della dissociazione di Lockyer.

4. Ora, il Prof. Antonio Garbasso [2]), che per il primo ha ardito di portare il rigore matematico nei concetti teorici della emissione della luce e della struttura degli atomi, ed è riuscito a risultati che mostrano un mirabile accordo coi fatti, spiegando le doppiette e le triplette, le serie di Kayser ecc., giunge ad una conclusione, che, almeno presa alla lettera, contraddice alle cose dette sopra, affermando:

« nella scintilla e nell'arco gli atomi *non* si dissociano, ma in diverse regioni i diversi conduttori sono variamente eccitati » aggiungendo però che gli atomi di alcuni metalli sono probabilmente dissociati nel sole.

Nella sua teoria gli atomi hanno per modelli certi si-

1) P. Drude. Lehrbuch der Optik, p. 492.

2) N. Cimento, serie V, tom. 9, p. 31, 118. 1905. — Mem. dell' Acc. delle Sc. di Torino, (2), vol. 53, p. 127. 1903; vol. 54, p. 402. 1904. — Boltzmann, Festschrift, 1904.

stemi di conduttori più o meno complessi, a ciascuno dei quali corrisponde una serie di righe.

Ora egli mostra che i periodi di un conduttore sono modificati un poco dalla vicinanza di un altro conduttore, e quindi se in una regione dell'arco o della scintilla i conduttori fossero insieme, in altri mancassero alcuni, si dovrebbero da queste regioni ottenere righe non perfettamente coincidenti, il che non è. Invece negli spettri di diverse parti del sole si osservano questi spostamenti di alcune righe di un elemento, mentre altre rimangono a posto, o sono spostate in senso contrario. Dunque negli archi e nelle scintille mancherebbe quella dissociazione che è presente nel sole; (salvochè per gli spostamenti non si accettino le altre spiegazioni più note, ma forse meno probabili, del principio di Doppler e della dispersione anomala).

Ciò è perfettamente logico, ma non si può escludere che vi possano essere altre forme di scomposizione che non siano l'allontanamento dei singoli conduttori di un sistema, ma che formino addirittura nuovi conduttori.

Quindi chi accetta la teoria della dissociazione del Lockyer opportunamente modificata, può anche accettare i risultati delle belle ricerche di A. Garbasso, perchè mi pare che si riferiscano a due lati diversi del fenomeno.

5. Ma nel concetto della risonanza si giunge coi metodi della fisica matematica a prevedere una perturbazione anche per i raggi che si avvicinano assai in lunghezza d'onda alla riga, pure essendo ad essa esterni.

Questa perturbazione consiste in un andamento caratteristico dell'indice di refrazione, cioè nella *cosidetta dispersione anomala.*

La teoria della dispersione è stata oggetto di un numero grandissimo di ricerche per parte di molti fisici matematici da Cauchy a Drude. Solo quando vi si introdusse il concetto della risonanza, si ottennero espressioni che con buona approssimazione corrispondono all'esperienza,

Di queste la più importante è quella detta di Sellmayer o di Ketteler-Helmholtz, perchè trovata da questi matematici per vie diverse. Indicando con n l'indice di rifrazione, con

λ_0 la lunghezza d' onda caratteristica delle vibrazioni proprie del corpo, con λ la lunghezza d' onda corrente e con a ed m due costanti, si ha per i raggi che sono esterni alla regione di assorbimento, cioè nel caso che ci interessa alla riga, la formula

$$n^2 - a^2 = \frac{m}{\lambda^2 - \lambda^2_0}$$

che mostra l' influenza della riga nel suo intorno.

Se sono vicine più righe, il loro effetto si sovrappone, e si ottiene per il caso di due linee vicine di differente intensità, che corrisponde al vapore di sodio:

$$n^2 - a^2 = \frac{m_1}{\lambda^2 - \lambda^2_1} + \frac{m_2}{\lambda^2 - \lambda^2_2} .$$

Sperimentalmente il fenomeno della dispersione anomala è stato per ora osservato in un piccolo numero di vapori solo per alcune righe, ma già sopra di esso si sono fondate teorie ardite riguardo alla costituzione del sole, che capovolgerebbero buona parte delle idee universalmente accettate.

6. La prima di esse fu pensata da Lord Kelvin [1]). Essa risponderebbe al desiderio di rendersi ragione di un fatto difcile a spiegare, sul quale anzi credo si sia troppo poco studiato e discusso.

Le righe di Fraunhofer dovute ai metalli sono spesso più sottili di quelle che noi possiamo produrre, facendo traversare alla luce una fiamma mediocremente carica di vapore metallico. Quelle dell' idrogeno non sono certo notevolmente più grosse delle invertite che ottennero Liveing e Dewar collo spessore di pochi centimetri di questo gas rarefatto.

E nel sole gli strati che producono l' inversione hanno uno spessore immenso, e la densità non vi può essere nemmeno estremamente piccola.

Ora questa grave difficoltà sarebbe tolta da un modo di considerare i fenomeni, proposto, o meglio soltanto esposto, da Lord Kelvin in una breve nota nella quale egli però non dichiara esplicitamente che valore gli attribuisca.

1) Phil. Mag., (5), vol. 47, pag. 302, 1899.

Egli premette che le esperienze di H. Becquerel dànno una conferma della formula di Sellmeier

$$n^2 = 1 + \frac{M_1 \tau^2}{\tau^2 - k_1^2} + \frac{M_2 \tau^2}{\tau^2 - k_2^2}$$

dove τ indica il periodo di vibrazione corrente, k_1 e k_2 quelli caratteristici, delle due righe D_1 D_2 [1]); e osserva che per valori di τ poco inferiori a k_1 e a k_2 si ha per n un valore immaginario, e corrispondentemente la luce non può esser trasmessa, e ciò dà luogo all' *ombra* delle righe. Per valori poi tali, che pur essendo reale, n è assai diverso dall' unità, si può applicare la nota formula di Fresnel

$$1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$

per calcolare la perdita di luce per riflessione, e così si può spiegare la *penombra*.

La riga in ombra e penombra verrebbe così a non dipendere affatto dallo spessore, ma solo dalla densità del vapore.

7. Veramente ardisco di obiettare, che nel caso di una fiamma o simili, manca una superficie netta di separazione tra essa e l' ambiente, cioè quel salto brusco nell' indice di rifrazione che è necessario per giustificare l' applicazione della formula di Fresnel.

Oltre a ciò, se questa teoria corrispondesse alla realtà, le linee invertite dovrebbero coll' aumento della densità spostarsi verso la parte più rifrangibile dello spettro, e precisamente il loro centro dovrebbe distare di metà della larghezza dell' ombra dalla posizione delle righe estremamente sottili.

Tale spostamento non è stato mai osservato per le righe del sodio.

Ciò non ostante io volli ancora ricercarlo in condizioni scelte appositamente per renderlo visibile in modo speciale se vi fosse.

Essendo già persuaso che un assorbimento vero e proprio dovese aver luogo, mi proposi non già di verificare se le ri-

1) Questa formula equivale perfettamente all' altra riferita sopra.

ghe scure fossero dovute totalmente a un effetto di riflessione, ma piuttosto se questa potesse avere nella loro produzione una parte sensibile. Ciò si sarebbe manifestato con uno spostamento delle righe larghe date dal vapore molto denso, rispetto a quelle sottilissime date dal vapore pochissimo denso.

8. Cercai adunque:

a) Che la densità del vapore di sodio potesse farsi variare entro limiti larghi, e soprattutto si potesse rendere assai grande.

b) Che lo spessore fosse invece piccolo il più possibile.

c) Che la disposizione spettrale fosse di alta dispersione e si prestasse ad apprezzamenti delicati.

d) Che fosse evitata ogni influenza della dispersione anomala per via diversa da quella in quistione (deviazione dei raggi fuori dello spettroscopio) [1]).

Usai lo stesso reticolo di Rowland, (di 6 piedi di raggio di curvatura) che mi aveva servito per lo studio interferenziale della dispersione anomala, osservando lo spettro di 2° ordine.

Le righe invertite erano ottenute con una fiamma prodotta nel seguente modo (fig. 4).

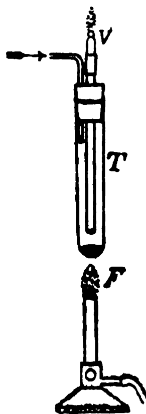


Fig. 4.

1) A questo proposito sono state fatte esperienze eleganti da Julius e da Ebert.

Una corrente di idrogeno asciutto era guidata nel tubo da saggio T, nel cui fondo era posto un po' di sodio metallico che veniva scaldato dalla fiamma F, posta sotto, e produceva così i vapori che, trascinati dall'idrogeno, colorivano intensamente la fiamma accesa sul becco a ventaglio V [1]).

Dal luogo di osservazione si poteva regolare sia la corrente d'idrogeno, sia quella del gas del bruciatore che serve al riscaldamento, e si poteva ottenere così la fiamma nelle condizioni desiderate.

La luce che serviva a dare lo spettro continuo era quella di una lampada Serrin a centro fisso (fig. 5).

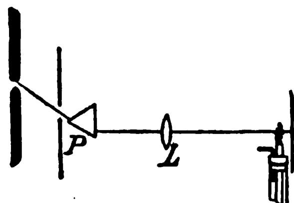


Fig. 5.

Il prisma P a riflessione totale serviva a rendere orizzontali i raggi del cratere; questi, limitati da un diaframma assai largo, venivano dalla lente L concentrati sulla fenditura a cui era quasi accosta la fiamma che aveva forma schiacciata, ed era traversata nel senso del minore spessore (circa 1 cm).

La posizione delle righe veniva determinata con un micrometro oculare a vite micrometrica con testa divisa in 100 parti, munito di un reticolo a forma di X che serviva ottimamente per il caso mio (fig. 6).

Con esso si prendeva bene la posizione anche delle righe larghissime regolandosi colle quattro intersezioni del loro margine sinistro e destro coi fili.

È da notare che la penombra ha pochissima estensione.

Per fissare la posizione delle righe sottili servivano quelle che sono sempre presenti invertite nell'arco, a causa dei sali

1) Ho appreso questo modo di produrre la fiamma del sodio da un lavoro di R. Wood.

di sodio contenuti in piccola quantità nei carboni ordinari; e non sarebbe stato opportuno accrescerne la larghezza.

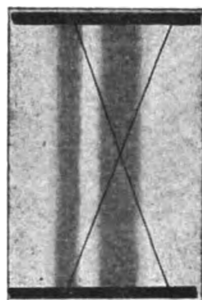


Fig. 6.

Aggiustavo adunque il reticolo sulla riga larga, spengevo la fiamma di sodio, e osservavo la posizione del reticolo rispetto alle righe sottili date dall' arco.

La coincidenza era quasi perfetta, e le piccolissime divergenze dipendenti da imperfezione dell' apprezzamento si verificavano indifferentemente in un senso o nell' altro, sia per la riga D_1 che per la D_2.

Feci anche delle serie di misure alternate colla fiamma d' idrogeno e sodio, e senza, e poi presi le medie delle misure delle due categorie, considerando le divergenze tra esse in rapporto alla divergenza di ciascuna misura dalla media, e alla distanza D_1 D_2.

Delle diverse serie fatte variando anche la densità del vapore nella fiamma, ne riferisco due fatte sulle righe D_1 e D_2 con vapore tanto denso quanto più si può senza che le righe espandendosi si accostino troppo tra loro, e un' altra di misure fatte tutte sulla D_2 che è la più larga delle due.

D_1

sottile	larga	
0,45		
	0,45	
0,45		
	0,41	
0,42		
0,44	0,43	medie

D_2

5,50	5,50
5,49	5,495
5,505	
5,50	5,50 medie

distanza $D_1 D_2 = 5,06$

altra posizione dell' oculare micrometrico

D_2

strette	larghe
5,45	
5,49	
5,44	
	5,52
5,47	
	5,49
5,45	
	5,425
5,48	
	5,405
5,445	
5,46	5,46 medie

9. Mi pare che questi numeri mostrino che manca uno spostamento sensibile delle righe coll' allargamento, e se si nota che, secondo la teoria, se le righe fossero dovute totalmente alla riflessione, questo spostamento dovrebbe uguagliare la metà della larghezza dell' ombra, cioè alcuni decimi della distanza tra le due righe, si vede che la riflessione [1]) (se pur c' è) non ha parte sensibile nella produzione delle righe scure.

1) Cioè quella dovuta a differenza di indice di rifrazione, giacchè quella dovuta a risonanza si considera come onde secondarie.

E neppure vi ha importanza notevole la produzione delle onde secondarie, perchè esse non prendono una parte rilevante della energia incidente [1]).

L'effetto capitale è prodotto dall'assorbimento vero e proprio, e per esso, almeno nel caso in questione, la energia raggiante si trasforma in calore. A questo proposito è opportuno citare una esperienza del Wood, il quale produceva del vapore di sodio nell'interno di una camera radiofonica, e mandando in questa luce molto intensa a intermittenze regolari e molto frequenti, osservava che il radiofono dava un suono forte se la luce conteneva le lunghezze d'onda caratteristiche del sodio, e rimaneva quasi in silenzio, se queste erano intercettate.

10. Ma se l'assorbimento è la causa delle righe, siccome esso cresce collo spessore secondo una legge esponenziale, e le righe sono dal più al meno sfumate agli orli, ci sarebbe da aspettarsi che, per spessori enormi quali quelli che si trovano negli invogli gassosi del sole, esse si dovessero espandere enormemente. Certo è che per la larghezza delle righe la densità del vapore ha molto maggiore importanza che non lo spessore; e siamo lontani dalla legge di Beer; cioè due righe ugualmente larghe possono corrispondere a quantità diverse di sostanza traversata dalla luce (spessore moltiplicato per la densità). Ma ciò non basta ancora, perchè alcuni vapori a gas, devono avere nel sole densità non piccolissime, non minori di quelle che hanno nelle sorgenti da laboratorio.

11. A me sembra che anche su questo punto l'esperienza di Liveing e Dewar sulla inversione delle righe dell'idrogeno nel tubo di Plücker, possa suggerire una spiegazione plausibile. In essa si vede che, come notai, ciò che determina la larghezza delle righe non è la densità del gas, ma sibbene la densità degli ipotetici vibratori, che si potrebbe chiamare (per non fare nessuna ipotesi) densità di eccitazione.

Ora sarebbe assurdo pensare che sebbene la densità dell'idrogeno nell'atmosfera solare non sia piccola, sia piccola

1) Vedi anche la mia nota sulla fluorescenza del vapore di sodio l. c.

invece la sua densità di eccitazione? E che ciò avvenga dal più al meno anche per i vapori metallici?

Ma anche per tal via si incontrano delle difficoltà, e bisogna confessare che non riusciamo a farci una idea esatta delle condizioni dei gas o vapori che costituiscono l'atmosfera del sole.

Ma passiamo alle teorie dell'Julius [1]) e di altri, secondo le quali le protuberanze sarebbero un fenomeno o meglio una figura dovuta alla dispersione anomala; questa avrebbe parte nella origine delle macchie e anche delle righe di Fraunhofer; tutto ciò che è spostamento di righe o variazioni in genere, inversioni, sfumature ecc. avrebbe la sua spiegazione non più nel principio di Doppler e nelle variazioni di densità, o simili, ma principalmente nella dispersione anomala, la quale dovrebbe ancora dare la chiave per interpretare i risultati dello spettroeliografo, chiarire i mutamenti del sole, la periodicità delle macchie, e anche avrebbe relazione colla meteorologia ecc. ecc. Gli spettri delle stelle nuove sarebbero secondo Ebert [2]) da interpretare con essa, che dovrebbe anche entrare in gioco in molte esperienze di laboratorio ecc.

Ma ripeterò quello che già dissi in una pubblicazione precedente [3]) che tutto ciò è ingegnoso, seducente, ma prematuro; prima è opportuno studiare bene il fenomeno in laboratorio, e notare quali righe lo presentano e in qual grado.

12. Il metodo interferenziale da me proposto ha continuato a servirmi utilmente. Colla disposizione descritta sul periodico *Memorie degli Spettroscopisti Italiani* ho fatto parecchie osservazioni di cui riferisco qui i risultati.

1) Julius. Archives Néerlandaises, (2), vol. 6, p. 155, 1901; vol. 7, p. 88, 473, 1902; vol. 8, p. 218, 374, 390, 1903; vol. 9, 211, 1904; vol. 10, p. 97, 1905; anche in Astronomische Nachrichten, vol. 153, c. 433, 1900; Phys. Z. S. vol. 2, p. 348, 357, 1900; vol. 3, pag. 154, 1901, vol. 6, p. 85, 132, 1902. Koninklyke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 8 Juni 1904.

2) Astronomische Nachrichten, vol. 64, col. 65, 1903.

3) Metodo interferenziale sulla dispersione anomala dei vapori ecc. l. c.; alle citazioni ivi fatte aggiungo. H. Ebert, Boltzmann, Festschriften 1904.

Ferro.

Prima sperimentai con un arco tra grosse bacchette di ferro, ma poi riconobbi più vantaggioso per me l' uso di carboni di cui il positivo era forato e ripieno di limatura di ferro mista a grafite. Non riuscii però a rendere l' arco molto tranquillo; e le fluttuazioni delle frangie facevano l'osservazione un po' penosa, e impedivano un ragguaglio molto accurato delle righe tra loro perciò che riguarda l' *intensità* della dispersione anomala. Invece l' individuare le righe e il riconoscere la presenza, o meno, del fenomeno nei limiti di sensibilità, si poteva fare con tutta sicurezza, coll' aiuto di una mappa fotografica del Rowland.

Nella seguente tabella le indicazioni delle lunghezze d' onda, dell' intensità della riga nell' arco e del suo aspetto (R significa invertita e i numeri crescono coll' intensità) sono tolti dal campione del Rowland [1]); le indicazioni dell' ultima colonna sono solamente approssimative.

(*f* = forte, *m* = media, *d* = debole, *dd* = debolissima, estrem. *d* = estremamente debole).

Si comprende che le righe di metalli presenti come impurità davano un effetto assai attenuato.

1) Dufet. Requeil de donnés numeriques, fasc. 1.

TABELLA I.

Indicazione	Elemento	Lunghezza d'onda	Intensità	Aspetto	Intensità appross. della dispersione anomala
Impurità	Mn	403,0919	(30)	(R)	*d d*
Impurità	Mn	403,3230	(25)	(R)	*d d*
Impurità	Mn	403,4642	(20)	(R)	*d d*
Impurità	Mn	403,588	(7)		*d d*
	Fe	404,5975	20	R	*f*
	Fe	406,3755	15	R	*m*
	Fe	407,1903	10		*m*
	Fe	420,2187	8		*d d*
Impurità	Ca	422,6898 (*g*)	(50)	(R)	*d*
	Fe	426,0647	6	R	*d*
	Fe	427,1920	10	R	*m*
Impurità di Ca ?	Fe	430,8072 (G)	7	R	*m*
	Fe	432,5932 (*f*)	10	R	*m*
	Fe	438,3721 (*d*)	15	R	*m*
	Fe	440,4928	10	R	*m*
	Fe	441,5298	4	R	*d*
	Fe	491,9183 (*)	6		estrem. *d*
	Fe	492,0676	9		estrem. *d*
	Fe	495,7482 (*)			*d d*
	Fe	516,7664 (b_4)	6		*d*
	Fe	522,5600 (*)	2		*d d*
	Fe	523,3124 (*)	7		*d d*
	Fe	526,9714 (E_2)	8		*d*
Impurità di Ca ?	Fe	527,0533* (E_1)	6		*d*
	Fe	532,4373 (*)	9		estrem. *d*
	Fe	537,1686 (*)	9		*d d*
	Fe	538,3576 (*)	6		estrem. *d*
	Fe	539,7319	7		*d d*
	Fe	540,5979	7		*d d*
	Fe	541,5421 (*)	4		estrem. *d*
	Fe	542,4284 (*)	5		estrem. *d*
	Fe	543,4725	5		*d d*
	Fe	544,7116	7		*d d*
	Fe	545,5826 (*)	6		*d d*

Calcio.

Carbone positivo animato con cloruro di calcio. Le lunghezze d'onda, le intensità della riga e l'aspetto come nella

(*) Mancando la misura della lunghezza d'onda nell'arco ho messo quella solare.

tabella precedente. Soltanto le lunghezze d' onda relative allo spettro di bande dell' ossido sono determinate da me per interpolazione dalle righe solari.

TABELLA II.

Indicazione	Elemento	Lunghezza d' onda	Intensità	Aspetto	Intensità appross. della dispersione anomala
	Ca	393,3809 (K)	75	R	*f*
	Ca	396,8617 (H)	70	R	*f*
	Ca	422,6898 (*g*)	50	R	estrem. *f*
	Ca	428,3175	5	R	*d d*
	Ca	428,9527	4	R	*d d*
	Ca	429,9153	3	R	*d d*
	Ca	430,2690	6	R	*d d*
	Ca	430,7906 (G)	4	R	*d d*
	Ca	431,8816	4	R	*d d*
	Ca	442,5616	5	R	*d d*
	Ca	443,5133	5	R	*d d*
	Ca	445,4949	6	R	*d d*
	Ca	526,1880 (*)	6		*d d*
	Ca	526,4408	6		*d d*
	Ca	526,5725	8		*d d*
	Ca	527,0445 (E_1)	10		*d d*
	Ca	558,2204	6		incerta
	Ca	558,8977	10	R	*d d*
	Ca	559,0352	5		incerta
	Ca	559,4689	7	R	*d d*
	Ca	559,8712	7		*d d*
	Ca	560,1502	5		*d d*
	Ca	560,3097 (*)	6		*d d*
	Ca	585,7672 (*)	10		estrem. *d*
Banda stretta	»	593,3	»	»	inflessione
	Ca	610,2941 (*)	10	R	*d d*
	Ca	612,2428 (*)	15	R	*d*
	Ca	616,2383 (*)	15	R	*d*
	Ca	616,9260 (*)	6		*d d*
Canto di banda	»	621,4	»	»	*f*
Canto di banda	»	622,5	»	»	*d*
	Ca	643,9298 (*)	10	R	*d*
	Ca	645,0029 (*)	5		*d d*
	Ca	646,2835 (*)	10	R	*d*
(?)	Ca	647,1881 (*)	5		*d d*
	Ca	649,4001 (*)	8		*d*
(?)	Ca	649,9871 (*)	5		estrem. *d*

Stronzio.

Le lunghezze d' onda e le intensità sono tolte dalle tabelle di Thalèn; i numeri più piccoli corrispondono alle righe più forti. Per l' aspetto io ho notato soltanto le inversioni più vistose.

TABELLA III.

Indicazioni	Elemento	Lunghezza d' onda	Intensità	Aspetto	Intensità appross. della dispersione anomala
	Sr	407,85	1	invertita	*f*
	Sr	421,53	1	invertita	*f*
	Sr	460,75	1	grde inver.	estrem. *f*
	Sr	472,10	3		*d*
	Sr	474,05	3		*d*
	Sr	478,35	3		*d*
	Sr	481,20	3		*d*
	Sr	483,15	3		*d*
	Sr	487,20	3		*d*
	Sr	487,60	3		*d*
	Sr	496,15	2		*d d*
	Sr	496,75	4		*d d*
	Sr	522,35	3		*d d*
	Sr	522,55	3		*d d*
	Sr	522,85	3		*d d*
	Sr	523,85	1		*d*
	Sr	525,60	2		*d*
	Sr	548,00	1		*d*
	Sr	548,50	3		*d d*
	Sr	550,35	2		*d d*
	Sr	552,25	2		*d d*
	Sr	554,00	3		*d d*
Angolo da una banda		636			*d*
	Sr	638,70	3		estrem. *d*
	Sr	640,70	1		*d*
Idem		647			*d d*
	Sr	650,15	2		*d d*
Idem		663			*d*
Idem		675			*d*

Bario.

Con carbone positivo animato di cloruro di bario, ho riconosciuto la dispersione anomala in 20 righe di questo metallo: 4 righe tra le più forti, facilmente invertibili, la presentano spiccatissima; una riga violetta, sebbene forte, non ne presenta traccia. Non posso dare ancora i numeri che hanno bisogno di un più accurato riscontro.

Magnesio.

Operando con un carbone animato da fili di magnesio, si osserva la dispersione anomala solo per la tripletta corrispondente a *b* solare; essa è forte per la componente meno rifrangibile, media per la media e debole per la più rifrangibile. L' aspetto delle frangie è molto caratteristico. Per le altre poche righe visibili del magnesio non ho osservato traccia di dispersione anomala.

Ho poi vantaggiosamente sostituito ai quattro prismi di flint dello spettroscopio un prisma con solfuro di carbonio che dà una dispersione quasi uguale, e una maggiore chiarezza. Con questo e con un obiettivo di Steinheil di quasi un metro di distanza focale, ho fatto le fotografie che sono, ingrandite circa del doppio, riprodotte nella Tavola II, N. 2 (sodio) N. 3 (bario) N. 4 (stronzio).

Il **Sodio** presenta il fenomeno solo per le righe D e per queste invero con intensità eccezionale, e non lo presenta sensibile per le altre righe visibili della prima e seconda serie accessoria. Per ora mi limito a riferire questi fatti che discuterò quando ne avrò osservati degli altri collo stesso metodo.

Voglio notare però che le differenze tra le diverse righe di uno stesso elemento, mostrano come anche, prescindendo da ogni applicazione alla spettroscopia celeste, questi studi abbiano un vivo interesse spettroscopico.

Riepilogo.

1. La legge di Kirchhoff non si può applicare con rigore alla maggior parte dei casi di emissione e di assorbimento

studiati dalla spettroscopia, perchè anche se pare probabile che in parecchi di essi la emissione sia di temperatura, manca di ciò la certezza. Tanto meno questa certezza si potrà avere per l'emissione dei corpi che si trovano nel sole e nelle altre stelle.

2. L'inversione dello spettro va riguardata piuttosto che come una conseguenza della legge di Kirchhoff, come un fatto sperimentale che si spiega col concetto della risonanza.

Le esperienze sulla inversione delle righe combinate colla molteplicità degli spettri, portano al concetto di una scala composta di tanti gradi di eccitazione; prima si diceva di temperatura (e alcuni, per es. il Lockyer, lo dicono ancora) ma allora bisogna prendere la parola temperatura in un senso un po' elastico. I diversi vibratori che possono esser forniti da un elemento, non sussistono tutti a tutti i gradi della scala. L'emissione corrispondente si ha sempre (tolto il caso dei primissimi gradi, come sarebbe di vapori metallici scaldati al disotto dell'incandescenza che non emettono ancora) purchè si sia raggiunto il grado di eccitazione a cui si forma il vibratore, e non si sia ancora raggiunto quello a cui si spezza.

L'inversione richiede inoltre un fondo continuo o almeno comprendente l'intorno spettrale della riga così intenso da superare l'intensità della luce emessa dal vapore, più quella da esso trasmessa indebolita per assorbimento.

Deve quindi, perchè la riga invertita sia visibile, essere la densità del vapore relativa a quei vibratori e lo spessore tanto elevato che l'assorbimento sia sensibile, e lo spettroscopio deve avere una sufficientemente alta risoluzione.

Ma soddisfatte queste condizioni, la riga scura sarà indizio della presenza di quel certo stato allotropico del vapore nè più nè meno come la riga chiara.

I gradi più alti di eccitazione che si possono raggiungere nel laboratorio, non sono mai separati da gradi assai inferiori; per questo il Lockyer [1]) ideò di rilevare le righe che si rinforzano notevolmente o compaiono passando dall'arco alla scintilla più energica che si possa ottenere: egli le disse righe rinforzate: *enhaced.*

1) Nature, vol. 59, p. 342, 468, 585, 585.

Lo spettro di alcune stelle tra le più bianche, cioè verosimilmente più calde, presenta numerosissime coincidenze di righe oscure con queste righe rafforzate, mostrando che il grado di eccitazione massimo nel nostro laboratorio è il minimo in quelle stelle, giacchè mancano gradi di eccitazione più bassi, e il loro interno si trova in un grado di eccitazione ancora superiore;

3. a meno che non si voglia ammettere che in esse la materia sia ancora in uno stato primordiale rispetto a quello in cui noi ordinariamente la studiamo, e se ciò fosse, verrebbe assai bene giustificato il nome di proto elementi (proto ferro, proto magnesio ecc.) che il Lockyer dà a questi corpi nello stadio in cui hanno uno spettro ridotto alle loro righe rafforzate le quali (è da notare) per ciascuno son poco numerose. E ciò sarebbe il risultato della teoria di dissociazione di Lockyer ridotta debitamente, e quale la propugna anche H. Kayser.

Ma tutto ciò risulta da un complesso vasto di indizi, piuttosto che essere provato da qualche fatto in modo decisivo, perchè le esperienze di inversione sono sempre complicate dalla presenza della emissione e sono troppe le righe non ancora invertite in laboratorio. Appresso dirò come la dispersione anomala ci può dare il modo di fare un' esperienza decisiva.

Altra cosa sarebbe la dissociazione quale discende dalla teoria di Garbasso, e secondo le sue esperienze non si effettua in laboratorio, ma può dare forse la più semplice spiegazione degli spostamenti di righe che si hanno nello spettro di alcune parti del sole e in quello delle stelle nuove.

4. Della dispersione anomala che secondo alcuni ha grande importanza astronomica è appena cominciato lo studio sperimentale: io porto per ora ad esso il contributo di oltre cento righe per la maggior parte nuove.

Il metodo interferenziale può presto fornire un materiale assai vasto perchè gli astronomi vi possano fondare le loro speculazioni.

Esso può anche dare il modo di fare quella esperienza decisiva di cui parlavo sopra.

5. Si tratta di confrontare la dispersione anomala nella fase di minimo e di massimo nell' arco con corrente alternata per

varie righe di uno stesso metallo. Questa, dipendendo solo dalla *costituzione* e non dalla *eccitazione*, ci potrà dare il modo di verificare se nel minimo, quando scompare la riga, è anche scomparso il vibratore, oppure se esso è presente senza essere eccitato.

Di questa esperienza, non priva di difficoltà pratiche, mi occupo da qualche tempo; e spero di riuscire.

Esprimo la mia gratitudine al Prof. Antonio Ròiti nel cui laboratorio ho studiato e lavorato, e ai Professori Angelo Battelli e Luigi Magri che hanno molto gentilmente messe a mia disposizione le loro belle fotografie di scintille, e ne hanno fatte alcune apposta per me.

R. Istituto Superiore di Firenze
Maggio 1905.

SULLA VARIAZIONE DI ISTERESI NEI CORPI MAGNETICI IN CAMPI FERRARIS SOTTO L' AZIONE DI CORRENTI CONTINUE INTERROTTE ED ALTERNATE E DI ONDE HERTZIANE.

Nota del Prof. RICCARDO ARNÒ.

In una prima Nota presentata alla R. Accademia dei Lincei ed in una susseguente Comunicazione fatta all' Associazione elettrotecnica italiana [1]), ho esposto i risultati di alcune ricerche sperimentali sulla variazione dell' isteresi magnetica in un disco o cilindro di materiale magnetico sospeso in un campo Ferraris, allorquando il disco o cilindro stesso è sottoposto all' azione di un sistema di onde hertziane.

In due recenti comunicazioni fatte al R. Istituto Lombardo di scienze e lettere [2]) ho riferito poscia i risultati di una serie di altre due ricerche intese a studiare il comportamento dei corpi magnetici in un campo Ferraris, sotto l' induzione di correnti continue, di correnti alternate di ordinaria frequenza e di correnti interrotte.

In seguito in alcune altre Note presentate alla R. Accademia dei Lincei [3]) ho riferito i risultati di nuove ricerche aventi per scopo di studiare il fenomeno della variazione di isteresi in un cilindro di acciajo sotto l' azione di una corrente continua, interrotta od alternata, o di un sistema di onde hertziane :

a) facendo variare, fra i limiti più estesi possibili, l' intensità del campo Ferraris in cui il cilindro è collocato ;

b) facendo variare, fra estesi limiti, l' intensità del campo magnetico secondario generato dalla corrente continua, interrotta od alternata, alla cui azione viene sottoposto il cilindro di materiale magnetico collocato nel campo magnetico rotante ;

1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1904, p. 272; Atti dell'Associazione elettrotecnica italiana (Comunicazione fatta alla Sezione di Milano nella seduta del 25 Maggio 1904).

2) Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere 1905, serie 2, vol. 38, p. 142 e 438.

3) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1905, pag. 278, 368 e 512.

c) facendo variare la frequenza della corrente alternata od il numero delle interruzioni al 1" della corrente interrotta su cui si sperimenta.

Quivi in appresso sono esposti i nuovi fatti constatati e succintamente riepilogati i principali risultati di queste mie ricerche:

1° In corrispondenza di campi Ferraris sufficientemente intensi, sempre si constata una diminuzione del ritardo di magnetizzazione nel cilindro di materiale magnetico; tale diminuzione di isteresi essendo tanto più grande quanto maggiore è l' intensità del campo Ferraris, in cui è collocato il cilindro su cui si sperimenta, e quanto maggiore è l' intensità del campo magnetico secondario generato dalla corrente su cui si sperimenta, ed alla cui azione il cilindro stesso è sottoposto.

2° In corrispondenza di campi Ferraris di debole intensità, si può avere aumento o diminuzione del ritardo col quale la magnetizzazione del cilindro di acciajo segue la rotazione del campo in cui esso è collocato: e precisamente si ha aumento di isteresi fino a che l' intensità del campo magnetico secondario non ha superato un certo determinato valore, a partire dal quale, e per tutti i valori ad esso superiori, si constata invece diminuzione di isteresi.

3° Esiste sempre — a parità di tutte le altre condizioni in cui si sperimenta — un valore della intensità del campo Ferraris, in cui è collocato il cilindro sottoposto all' azione della corrente continua interrotta od alternata, o del sistema di onde hertziane, per cui si ha il massimo aumento di isteresi; ed un valore della intensità del campo Ferraris per cui non si ha più nè aumento nè diminuzione di isteresi nel materiale magnetico sperimentato.

4° Allorquando si sperimenta con campi Ferraris di debole intensità, esiste sempre — in corrispondenza di una data intensità del campo magnetico rotante e a parità di tutte le altre condizioni in cui si sperimenta — un valore della intensità del campo magnetico secondario per cui si ha il massimo aumento di isteresi; ed un valore della intensità del campo magnetico secondario per cui non si ha più nè aumento

nè diminuzione di isteresi nel materiale magnetico sperimentato.

5° A parità di tutte le altre condizioni in cui si sperimenta, se si ha aumento di isteresi, questo è notevolmente più piccolo nel caso in cui si sperimenta con correnti continue che allorquando il corpo magnetico è sottoposto all'azione di correnti interrotte od alternate; e se, d'altra parte, si ha diminuzione di isteresi, questa è invece notevolmente più grande se si sperimenta con correnti continue di quella che altrimenti si ottiene con correnti interrotte od alternate.

6° Allorquando sottoponendo il cilindro di materiale magnetico all'azione di una corrente continua, si ha, in certe determinate condizioni, nè aumento nè diminuzione di isteresi, si ottiene sperimentando in quelle stesse condizioni con correnti interrotte ed alternate, aumento di isteresi.

Viceversa, allorquando sottoponendo il cilindro di materiale magnetico all'azione di una corrente interrotta od alternata, si ha, in certe determinate condizioni, nè aumento nè diminuzione di isteresi, si ottiene sperimentando in quelle stesse condizioni con correnti continue, diminuzione di isteresi.

7° Può ancora accadere che, sperimentando con correnti continue ed avendo diminuzione di isteresi, si abbia invece — sperimentando con correnti interrotte od alternate e mantenendo inalterate tutte le condizioni dell'esperimento — aumento del ritardo di magnetizzazione nel cilindro di materiale magnetico.

8° L'aumento del ritardo di magnetizzazione è, a parità delle altre condizioni, tanto più grande quanto maggiore è la frequenza della corrente alternata o quanto maggiore è il numero delle interruzioni al 1" della corrente interrotta su cui si sperimenta.

9° La diminuzione del ritardo di magnetizzazione è, a parità delle altre condizioni, tanto più grande quanto minore è la frequenza della corrente alternata o quanto minore è il numero delle interruzioni al 1" della corrente interrotta su cui si sperimenta.

10° Allorquando sottoponendo il cilindro di materiale magnetico all'azione di una corrente alternata di una data

frequenza, od interrotta con un dato numero di interruzioni, si ha, in certe determinate condizioni, nè aumento nè diminuzione di isteresi, si ottiene, sperimentando in quelle stesse condizioni con correnti alternate di frequenza maggiore od interrotte con maggior numero di interruzioni, aumento di isteresi.

Viceversa, allorquando sottoponendo il cilindro di materiale magnetico all' azione di una corrente alternata di una data frequenza od interrotta con un dato numero di interruzioni, si ha, in certe determinate condizioni, nè aumento nè diminuzione di isteresi, si ottiene, sperimentando in quelle stesse condizioni con correnti alternate di frequenza minore od interrotte con minor numero di interruzioni, diminuzione di isteresi.

11° Può finalmente ancora accadere che, sperimentando con una corrente alternata di una data frequenza od interrotta con un dato numero di interruzioni, ed avendo diminuzione di isteresi, si abbia invece — sperimentando con correnti alternate di frequenza maggiore od interrotte con maggior numero di interruzioni, e mantenendo inalterate tutte le condizioni dell' esperimento — aumento del ritardo di magnetizzazione nel cilindro di materiale magnetico.

E così può ancora accadere che, sperimentando con una corrente alternata di una data frequenza, od interrotta con un dato numero di interruzioni, ed avendo aumento di isteresi, si abbia invece — sperimentando con correnti alternate di frequenza minore, od interrotte con minor numero di interruzioni, e mantenendo inalterate tutte le condizioni dell'esperimento — diminuzione del ritardo di magnetizzazione nel cilindro di materiale magnetico.

LIBRI NUOVI

THERMODYNAMIK UND KINETIK DER KÖRPER,

von B. WEINSTEIN.

III Band — Erster Halbband.

(Braunschweig, F. Vieweg u. Sohn, 1905)..

Questa prima parte del terzo volume (Cfr. *N. Cim.* (V) 5, p. 283) contiene la teoria delle soluzioni diluite e della dissociazione, e tratta la termodinamica dei fenomeni elettrici e magnetici.

Con molta ricchezza di particolari, nella teoria delle soluzioni e della dissociazione l' A. espone i concetti di v. Hoff, di Arrhenius e di Nernst, e li sottopone a una rigorosa critica, mostrando quanto di essi si possa accettare, e quanto sia sempre soggetto ad obiezioni.

In questo volume vien poi cominciata la termodinamica dell' elettricità e del magnetismo. In esso, dopo accennate le antiche teorie e dopo aver esposto il nuovo concetto degli elettroni e delle correnti elettriche, si trattano tutti i fenomeni elettrici e magnetici in generale, considerandoli specialmente dal punto di vista della termodinamica.

Anche questo volume sarà consultato con profitto dagli studiosi della fisica, che vi troveranno gran quantità di cognizioni, esposte con notevole chiarezza, e coordinate con rigore scientifico. A. S.

THERMODYNAMIK,

von W. VOIGT.

II Band

(Leipzig, Göschen, 1904).

Il secondo volume di questo trattato (Cfr. *N. Cim.* (V) 5, p. 281) comprende la termochimica e la termodinamica della elettricità. Vi sono esposti sommariamente anche i principi relativi

ai cicli termici, alle azioni capillari, alla coesistenza delle fasi, alla continuità dello stato liquido e gassoso, alla dissociazione elettrolitica, che fanno parte della trattazione della termochimica. Nella termodinamica dei fenomeni elettrici si trattano i fenomeni elettrostatici, il galvanismo e la radiazione del calore.

A. S.

HYPOCLORITE UND ELECTRISCHE BLEICHE

von E. ABEL.

(Halle, a. S. W. Knapp, 1905).

È uno dei volumi dell'enciclopedia di elettrochimica applicata, e come gli altri congeneri è una monografia completa del soggetto. Qui si tratta della produzione elettrochimica degli ipocloriti, dal punto di vista teorico. A. S.

DIE MISSERFOGLE IN DER PHOTOGRAPHIE, UND DIE MITTEL ZU IHRER BESEITIGUNG,

von H. MÜLLER.

(Halle, W. Knapp. 1905).

È il 7.° volume dell'enciclopedia di fotografia che il solerte editore pubblica da poco tempo. Esso riescirà utile non solo al fotografo di professione e al dilettante, ma anche ai fisici, che spesso si trovano nella necessità di ricorrere alla fotografia. Vi sono infatti indicate le cause d'insuccesso derivanti sia dagli apparecchi o mal costruiti o messi male in opera, sia dello sviluppo, dal fissaggio, dall'illuminazione, dalla posa ecc.; e i rimedi e i ripieghi per eliminare tali insuccessi sono esposti in forma semplice e piana. — Questa però è la prima parte del lavoro, che si occupa soltanto del processo negativo. È stata pubblicata in altro volume (8.° della collezione) anche ciò, che si riferisce al processo positivo.

A. S.

Die Photographische Retusche,

UEBERS EINE ANLEITUNG ZUM KOLORIREN VON PHOTOGRAPHIEN,

von G. MERCATOR.

(Halle, W. Knapp, 1905).

È anche questo un volume dell'enciclopedia fotografica (il 21.°); e contiene le regole del ritocco, delle negative e delle positive. In esso è pure esposto il metodo che si segue per colorire le negative sul vetro, e le positive sulla carta o le diapositive sul vetro. A. S.

RIVISTA

Comptes Rendus. T. 138, Febbraio, 1904.

CHABRIÈ C. ***Sulla funzione che rappresenta l'ingrandimento degli oggetti visti attraverso un cono di cristallo*** **(pp. 349-351). — Abbiamo già brevemente descritto il dispositivo ideato dall'A. che permette, quando si esamina un disco luminoso di raggio ρ, di ottenere per sua immagine una porzione di piano compresa tra due circonferenze concentriche di raggi R e r.**

In questa Nota l'A. dimostra che la funzione che lega le dimensioni contate su una circonferenza dell' immagine e quelle contate sulla circonferenza corrispondente dell' oggetto, è:

$$y = R - \frac{x}{\rho}(R - r),$$

dalla quale si deduce che l' ingrandimento, variabile a seconda che si considera una circonferenza più o meno vicina al centro, è dato da:

$$Y = \frac{y}{x} = \frac{R}{x} - \frac{R - r}{\rho}.$$

GUTTON C. ***Sull' effetto magnetico delle correnti di convezione*** **(pp. 352-353). — In questa Nota l'A. riporta alcune esperienze colle quali, basandosi sull' effetto prodotto su uno schermo fosforescente da un campo magnetico, anche debole, di cui ha trattato in una precedente Nota, è riuscito a rivelare l' esistenza dell' effetto magnetico delle correnti di convezione.**

SCHAFFERS V. *Nuova teoria delle macchine a induzione* (pp. 354-355). — L'A. rileva innanzi tutto che le teorie esistenti sul funzionamento delle macchine elettrostatiche a induzione sono insufficienti :

1° perchè non spiegano l'aumento delle cariche;

2° perchè, una volta ammesso questo aumento, non sanno assegnare cause alla limitazione di esso.

La considerazione della variazione di capacità (e per conseguenza di potenziale) per unità di superficie nella rotazione dei piatti, risolve, secondo l'A. quelle difficoltà.

Nelle macchine a induttori fissi, la capacità per unità di superficie è massima davanti a ciascuna armatura. Al di là, essa decresce rapidamente, e per conseguenza il potenziale vi si eleva in ragione inversa.

Ed è in queste regioni di potenziale massimo che si fissano gli organi di ricarica dell'armatura opposta: da ciò l'aumento della carica di quella armatura.

Se questa carica poi non aumenta indefinitamente si deve al fatto che le cariche di segno contrario fornite al disco dai collettori si portano al di là della elettricità che loro reca la rotazione, e vanno tanto più lontane quanto più sono elevati i potenziali già raggiunti. Ma questo avanzarsi modifica la distribuzione e fa, in particolare, retrocedere la regione del massimo potenziale. Gli organi di ricarica degli induttori finiscono allora per trovarsi a un potenziale che non è più superiore a quello delle loro armature, e la carica diventa stazionaria. L'aggiunta del conduttore diametrale, riportando più lontano i cangiamenti di segno, riporta i potenziali massimi davanti gli organi di ricarica delle armature, e ve li mantiene. È soltanto allora che intervengono le perdite per limitare l'accrescimento ulteriore.

Le macchine poi a rotazioni inverse si trovano, dal punto di vista dell'accrescimento delle cariche, nel caso di un condensatore formato da due armature di superfici disuguali. L'A. osserva che per brevità, si potrebbe chiamare un *condensatore incompleto*. In un sistema simile, la piccola armatura avrà, per unità di superficie, una densità di carica più grande dell'altra, e per conseguenza, quando si separeranno, un potenziale più elevato in valore assoluto. Ora è facile vedere che ciascuna metà del conduttore diametrale carica la piccola armatura di un condensatore incompleto, e che la carica più densa così prodotta si trova ripartita in modo da costituire la grande armatura nel punto in cui agisce il conduttore diametrale opposto.

Anche qui il limite è fissato dall'avanzarsi delle regioni d'inversione. Quando le estremità di queste regioni arrivano di fronte l'una all'altra le due armature del condensatore sono divenute sensibilmente uguali, le densità lo sono pure, e da allora il guadagno è nullo.

FRAICHET L. *Sulla relazione che esiste tra le variazioni brusche della riluttanza di una sbarra di acciaio calamitata sottoposta alla trazione e la formazione delle linee di Linders* (pp. 355-356). — Da numerose esperienze eseguite su provette di acciaio di qualità diverse, o che avevano subito trattamenti diversissimi, l'A. ha rilevato che durante tutto il tempo che si osserva la formazione di nuove righe, la variazione della riluttanza della sbarra è discontinua: inversamente non appena la variazione della riluttanza ritorna continua, non si osserva più la formazione di alcuna nuova riga.

BROCHET A. e PETIT J. *Sull'impiego della corrente alternativa in elettrolisi* (pp. 359-361). — Di questo stesso argomento si sono occupati molti e valenti sperimentatori, la maggior parte dei quali sono arrivati alle seguenti conclusioni:

1° Le reazioni provocate dalla corrente alternativa si producono tanto meglio quanto più elevata è la densità della corrente agli elettrodi e più bassa la frequenza.

2° Gli elettrodi dei voltametri sono rapidamente alterati o distrutti.

Gli A. hanno eseguito una serie di ricerche utilizzando una corrente colla frequenza 42, che era trasformata per mezzo di una bobina di reattanza, la quale permetteva loro di utilizzare la tensione sotto un multiplo di 7 v.

In un lavoro interessante sulla dissoluzione di alcuni metalli, particolarmente del rame, nel cianuro di potassio sotto l'influenza della corrente alternativa, Le Blanc e Schick, facendo variare la frequenza per minuto da 0,5 a 20000 hanno mostrato che il rendimento, quasi quantitativo al principio, tendeva verso zero.

Gli A. hanno confrontato l'effetto della corrente sinusoidale alla corrente prodotta da Le Blanc e Schick, e hanno ottenuto risultati analoghi ai loro, colla differenza che i rendimenti, dello stesso ordine di grandezza, erano più deboli.

Cercando quindi l'applicazione della corrente alternativa gli A. hanno determinato il limite di solubilità del rame, il quale corrisponde e 1 molecola grammo per 8 molecole grammo di cianuro di potassio.

La reazione che si produce è la seguente:



$$Cu^2 + 8KCy + 2H^2O = Cu^2Cy^2, 6KCy + 2KOH + H^2.$$

In tal modo hanno potuto ottenere in abbondanza il cianuro di rame e di potassio rispondente alla formula $Cu^2 Cy^2$, 6K Cy.

Circa l'ipotesi ammessa da Le Blanc e Schick che la dissoluzione del rame nel cianuro, sotto l'influenza della corrente alternativa, sia dovuta alla formazione di un ione complesso che mette il rame al riparo della precipitazione, gli A. osservano che non è da parte loro accettabile perchè:

1° Il rame è precipitato completamente dalle sue soluzioni nel cianuro di potassio (dosaggio elettrolitico del rame);

2° Il rame si discioglie nel cianuro di potassio, lentamente a freddo, rapidamente a caldo: se il rame è collegato a una lamina di platino, l'attacco è molto più energico in ragione della coppia così formata.

Da questi primi risultati gli A. concludono che la corrente sinusoidale attiva la dissoluzione del rame nel cianuro di potassio, e permette la formazione pratica di un sale determinato.

Anche lo zinco e il nickel si comportano nello stesso modo: il mercurio, l'argento, il piombo e il cadmio non danno risultati sensibili.

Pearce F. e Cauchet C. *Sui fenomeni di riduzione prodotti dall'azione delle correnti alternative* (pp. 361-362). — Facendo passare una corrente alternativa in soluzioni di alcuni sali, si osserva: sia una dissoluzione degli elettrodi, fenomeno osservato e minuziosamente descritto da Le Blanc e Schick; sia una riduzione, più o meno completa, dei sali disciolti, se il sale è riduttibile.

Questo fenomeno è stato osservato dagli A. in sali inorganici, disciolti o fusi, come pure su alcuni composti organici, e hanno ritrovato che il fenomeno di riduzione non avviene se non quando si impiegano elettrodi facilmente ossidabili, e che sembra dipendere in una certa misura dalla natura di questi, dalla densità della corrente e dalla frequenza.

Così hanno ottenuto la riduzione di nitrati alcalini in nitriti, di sali ramici in sali ramosi, di sali mercurici in sali mercurosi, etc. etc.

Nel caso di composti organici gli A. hanno constatato una riduzione del nitrobenzene in sale di anilina.

Boussinesq. *Sulla unicità della soluzione semplice fondamentale e della espressione asintotica delle temperature, nel problema del raffreddamento* (pp. 402-406).

Debierne A. *Sulla emanazione dell' attinio* (pp. 411-414). — In una Nota precedente, l'A. ha già rilevato la differenza esistente

fra i fenomeni di radioattività indotta prodotti dai composti di attinio, e quelli osservati coi sali di radio e di torio.

In questa Nota l'A. indica i risultati di uno studio più dettagliato della legge della scomparsa dell' emanazione dell'attinio, e di quella della decrescenza della radioattività indotta provocata da questa emanazione. Secondo questi risultati l' energia dell'emanazione, misurata per l' effetto di ionizzazione del gas, decresce regolarmente a partire dal momento in cui l' emanazione è stata prodotta, secondo una legge esponenziale semplice: la diminuzione è della metà in circa 4 secondi.

Ricercando quindi se si otteneva la stessa legge di decrescenza prendendo l' intensità dell' attivazione in corpi solidi come misura dell' energia dell' emanazione, l'A. ha avuto un risultato diverso da quello indicato precedentemente per l' effetto ionizzante. Mentre infatti l' energia ionizzante dell' emanazione diminuisce regolarmente dal momento dello sviluppo per parte dell' attinio, l' energia attivante aumenta dapprima rapidamente, passa per un massimo, e non diminuisce regolarmente che dopo un certo tempo. Questa decrescenza regolare è allora identica a quella dell'energia ionizzante, ed è essa pure di metà in 3",9. Non si può naturalmente, secondo l'A., determinare l' effetto della emanazione nel momento dello sviluppo per parte dell' attinio, ma la forma delle curve indica che è molto probabile che l' effetto attivante sia dapprima nullo, allorchè l' effetto ionizzante è grandissimo. I due effetti sono dunque tutt' affatto distinti, e si è condotti a considerare l' emanazione come costituita da due specie di centri di energia: gli uni che producono l' ionizzazione dei gas, probabilmente per l' emissione di raggi Becquerel, gli altri che provocano la radioattività indotta sui corpi solidi: e quelli che attivano succedono a quelli che ionizzano.

Il fenomeno si può quindi, secondo l'A. rappresentare nel modo seguente. I centri di emanazione prodotti direttamente dall' attinio ionizzano i gas ma non danno radioattività indotta: essi spariscono poco a poco secondo la legge di diminuzione della metà in 4 secondi, trasformandosi in centri attivanti: questi ultimi non ionizzano sensibilmente i gas, e spariscono essi stessi progressivamente, producendo la radioattività indotta sui corpi solidi.

L'A. ha determinato pure la legge di decrescenza della radioattività indotta provocata dall' emanazione dell' attinio, trovando che la decrescenza è regolare, e della metà in 40 minuti.

Infine ha constatato che oltre l' emanazione principale molto intensa, a decrescenza rapida, studiata precedentemente, i composti

attiniferi sviluppano in debole quantità un' altra emanazione la cui legge di decrescenza è molto lenta. Si propone quindi di determinare se questa emanazione non si debba a un elemento radioattivo diverso dall' attinio.

CHARPENTIER A. *Fenomeni diversi di trasmissione di raggi N e applicazioni* (pp. 414-416). — Dopo avere rilevato come la trasmissione dei raggi N e delle radiazioni fisiologiche possa sperarsi anche con fili non metallici, ma per mezzo pure di altri corpi come isolanti, l'A. riporta una serie di esperienze sulla trasmissione dei raggi N emessi nella fosforescenza, eseguite adoperando come conduttore un filo di rame.

L' esperienza fondamentale consiste nel situare alle estremità di un filo di rame, ripiegate ad anello o spirale, del solfuro fosforescente. Aumentando allora la fosforescenza di uno dei solfuri terminali, si vede aumentare lo splendore anche dell' altro, dopo un certo numero di secondi. Interrompendo in un modo qualsiasi la continuità del conduttore l' effetto cessa di apparire.

L'A. ha trovato inoltre che il tempo necessario per la trasmissione aumenta colla lunghezza del conduttore, e può elevarsi fino a 12 e 13 secondi, e che l' equilibrio luminoso si stabilisce per oscillazioni di splendore sovente molto prolungate, e di un periodo di più secondi: queste oscillazioni si ritrovano ugualmente nella sorgente.

Adoperando come conduttore una cordicella più o meno lunga, impregnata di una soluzione collodionata di solfuro di calcio fosforescente, ha osservato che la funicella si illumina tutta quanta, e sembra, in alcuni casi, essere percorsa da onde dello stesso ordine delle precedenti, di cui l' occhio può seguire il movimento, alternativamente in un senso e nell' altro.

BLONDLOT R. *Registrazione, per mezzo della fotografia, dell' azione prodotta dai raggi* N *su una piccola scintilla elettrica* (pp. 453-456). — Unita a questa Nota è riportata una tavola di fotografie, dalla quale si rileva facilmente l' influenza dei raggi N sull' impressione fotografica prodotta da una piccola scintilla elettrica. I raggi di cui l'A. si è servito in queste esperienze erano emessi da sorgenti diverse, come lampade Nernst, legno compresso, acciaio temprato, ecc. ecc.

PELLAT H. *Dell' ufficio dei corpuscoli nella formazione della colonna anodica dei tubi a gas rarefatti* (pp. 476-479). — La differenza, talvolta grandissima, che si osserva nei tubi a gas rarefatti, tra la guaina catodica e la colonna anodica ha portato alcuni a pensare che la prima sia dovuta agli urti dei corpuscoli negativi, o raggi catodici, la seconda agli urti degli ioni positivi. Il

Thomson ha emesso l'ipotesi che anche questa fosse prodotta dagli urti dei corpuscoli.

L'A. per risolvere in modo decisivo la quistione è ricorso alla esperienza seguente:

Fra due punti di un tubo cilindrico, riempito in gran parte di luce anodica, ha creato un campo magnetico uniforme, perpendicolare all'asse del tubo: al di là dell'intervallo compreso fra i due punti il campo era sensibilmente nullo. Il campo era inoltre così poco intenso da evitare la produzione dei fenomeni di magneto fusione e da ridurre la sua azione sul fascio, alla deviazione magnetica.

In queste condizioni, rileva l'A., le leggi dell'elettromagnetismo permettono di calcolare la traiettoria che segue una particella elettrizzata in funzione della sua massa, della sua carica, dell'intensità dei due campi elettrico e magnetico e della sua velocità nel penetrare nel campo magnetico, per il caso teorico in cui nel tubo esistesse una sola particella elettrizzata. Da questo caso poi, si passa al caso reale di un numero considerevole di particelle elettrizzate per mezzo di considerazioni molto semplici e se ne conclude la forma che deve prendere il fascio nel campo magnetico.

Ora la forma che la teoria assegna al fascio è estremamente diversa a seconda che le particelle sono coustituite da corpuscoli negativi o da ioni positivi, a causa della enorme differenza di massa che, per questi ultimi, è almeno 2000 volte più considerevole di quella dei corpuscoli.

Tutto ciò premesso, e tenendo quindi conto dei risultati offerti dalla esperienza, l'A. conclude che:

La luminescenza del gas chiamata colonna anodica *segue esattamente la traiettoria dei corpuscoli negativi, e non ha alcun rapporto con quella degli ioni positivi.* P. Bacci.

FINE DEL VOLUME IX SERIE V.

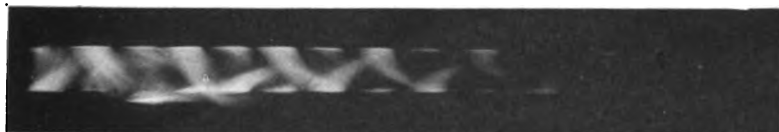
Pietro Salvioni, *gerente responsabile.*

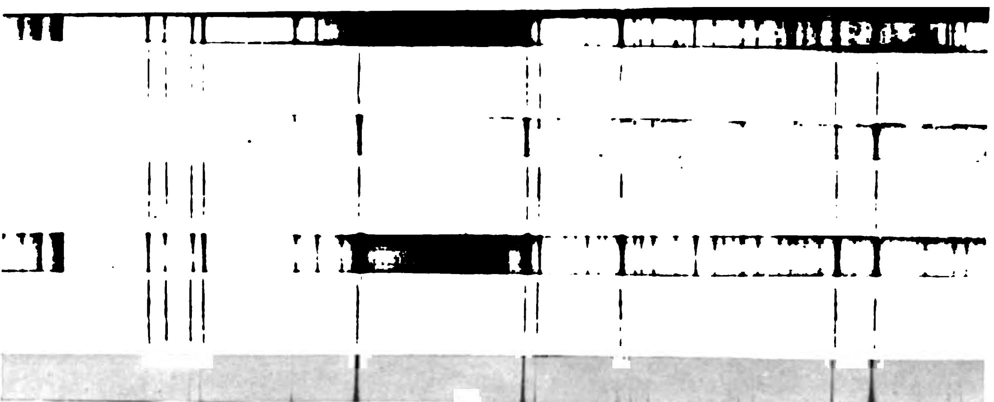

1


2

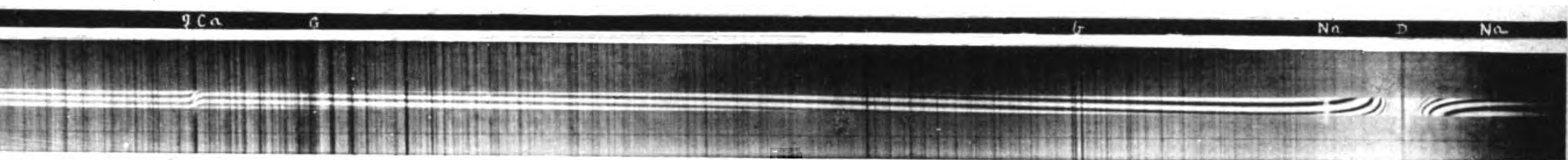

3


4

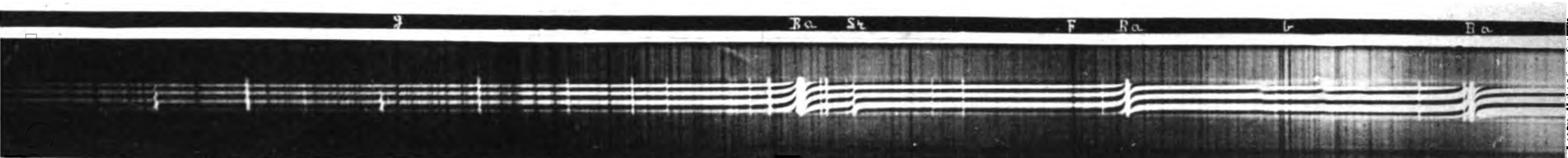

5



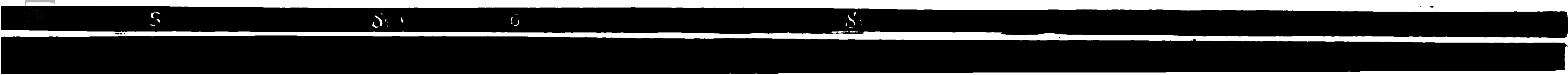
1

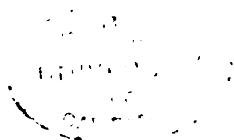


2



3





SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

Continuazione della Nota pubblicata a pag. CCXLIII.

Hanno fatto adesione alla Società i Signori

Finazzi Dott. Luigi	di Padova
Lomeni Dott. Arturo	di Cernusco sul Naviglio
Negro Dott. Carlo	di Bologna
Pignataro Dott. Pietro	di Cerignola (Foggia)

Hanno pagato la quota del 1904 i Soci:

Amerio Alessandro
Artom Alessandro
Boccara Vittorio
Campetti Adolfo
Cantone Michele
Contini Attilio
Dall' Oppio Luigi
De Candia Oronzo
De Lucchi Guglielmo
Dessau Bernardo
Federico Rosario
Ferraris Lorenzo
Fontana Ariodante
Gandolfi Archimede
Gervasio Guido
Grimaldi Giovan Pietro
Leone Leonardo
Lori Ferdinando
Macaluso Damiano
Mastricchi Felice
Mauri Aurelio
Omodei Domenico
Palazzo Luigi
Sala Mario
Tolomei Giulio

Hanno pagato la quota del 1905 i Soci:

Bellati Manfredo
Campetti Adolfo
Cirri Oreste
Ferraris Lorenzo
Finazzi Luigi
Gandolfi Archimede
Garbasso Antonio
Levi Civita Tullio
Lomeni Arturo
Lori Ferdinando
Lussana Silvio
Mauri Aurelio
Morra Pietro Paolo
Negro Carlo
Pignataro Pietro

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

Continuazione della Nota pubblicata a pag. CCXLV.

Hanno pagato la quota del 1904 i Soci:

Bazzi Eugenio
De Michelis Antonino
Del Lungo Carlo
Drago Ernesto
Picciati Giuseppe
Pierpaoli Nazareno
Vanni Giuseppe

Hanno pagato la quota del 1905 i Soci:

Alessandri Guido
Chistoni Ciro
Guglielmo Giovanni

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

Continuazione della Nota pubblicata a pag. CCXLVII.

Hanno pagato la quota del 1904 i Soci:

Castelli Enrico
Consani Dario
Macchia Pietro
Piola Francesco
Stracciati Enrico

Hanno pagato la quota del 1905 i Soci:

Antoniotti Riccardo
Banfi Enrico
Bertagna Michele
Canuto Sebastiano
Marcucci Salvino
Piaggesi Giuseppe
Stracciati Enrico

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

Continuazione della Nota pubblicata a pag. CCXLIX.

Hanno pagato la quota del 1904 i Soci:

Puccianti Luigi
Sandrucci Alessandro
Segalin Leandro
Stracciati Enrico

Hanno pagato la quota del 1905 i Soci:

Calzecchi Temistocle
Finocchi Eusebio
Marangoni Carlo
Mazzotto Domenico
Naccari Andrea
Pacinotti Antonio
Rossi Paolo
Torre Giov. Battista
Volta Alessandro

SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

Ha fatto adesione alla Società il signor

Blanc Dott. Alberto Roma

Continuazione della Nota pubblicata a pag. CCLI.

Hanno pagato la quota del 1904 i Soci:

Dainelli Alberto
Fantappiè Liberto
Pandolfi Mario
Perotti Pier Luigi

Hanno pagato la quota del 1905 i Soci:

Angelini Sebastiano
Bongiovanni Giuseppe
Faè Giuseppe
Ferrini Rinaldo
Jona Emanuele
Lambertenghi Giacinto
Marianini Abdenago
Razeto Michele
Roiti Antonio
Rovelli Costantino
Sforzini Oreste
Somigliana Carlo

INDICE

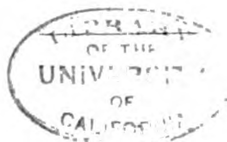
LIBRI NUOVI

RIVISTA.

Comptes Rendus. — 1904.

Physikalische Zeitschrift. — 1904.

Bulletin des Ingenieurs Electriciens. — 1904.


OF THE
UNIV
OF



